

Edmond Lulja

Irena Tafani

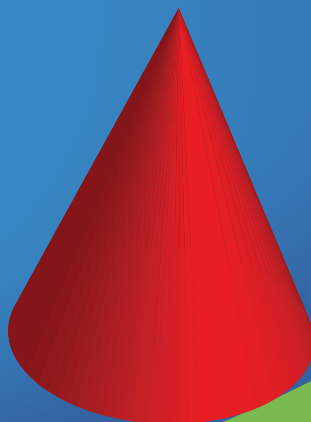
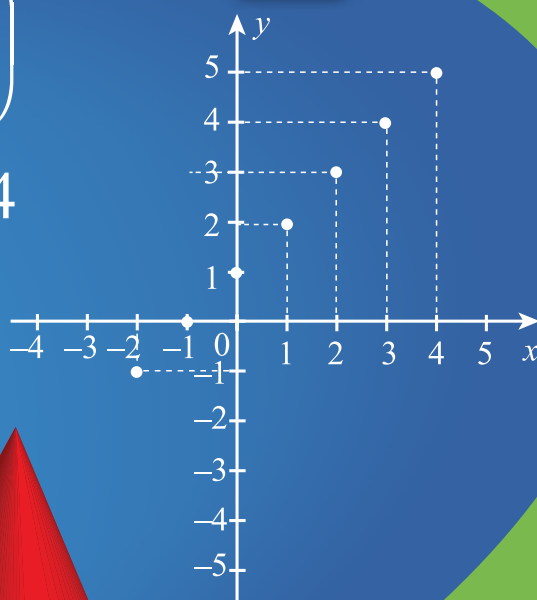
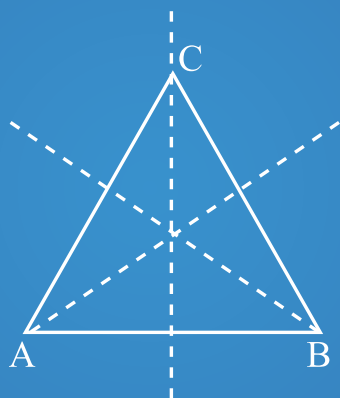
Ramadan Limani

Matematika

7

$$\left(\frac{3}{4}x^2y\right)^2$$

$$2x^2 - 4x + 5 + 5x - 7x^2 - 4$$



BOTIME



Edmond Lulja

Irena Tafani

Ramadan Limani

MATEMATIKA 7

Për klasën e 7-të të arsimit 9-vjeçar

BOTIME



Prishtinë, 2024



BOTIME



Drejtoi botimin: Arlinda RRUSHI
Recensentë të MASHTI-t:
????????????
Redaktorë letrarë: Ornela LECI, Aida BARO
Korrektore letrare: Oriada Dajko
Paraqitja grafike: Elidor KRUJA, Elvis BEJTJA
Kopertina: Elvis BEJTJA
Shtypi: Shtypshkronja Pegi, Lundër, Tiranë
ISBN: 978-9951-843-26-3

© Botime Pegi sh.p.k., dega në Kosovë, maj 2024
Të gjitha të drejtat për këtë botim në gjuhën shqipe janë tërësisht të zotëruara nga Botime Pegi shpk. Ndalohet çdo riprodhim, fotokopjim, përshtatje, shfrytëzim ose çdo formë tjetër qarkullimi tregtar, pjesërisht ose tërësisht, pa miratimin paraprak nga botuesi.

Të gjitha tekstet letrare dhe jolettrare të këtij libri janë përshtatur dhe redaktuar për qëllime didaktike.

Botime Pegi: tel: +355/ 042 468 833; cel: +355/ 069 40 075 02;
e-mail: botimepegi@botimepegi.al; web: www.botimepegi.al
Spektori i shpërndarjes: cel: +355/ 069 20 267 73; 069 60 778 14;
e-mail: marketing@botimepegi.al
Shtypshkronja Pegi: cel: +355/ 069 40 075 01;
e-mail: shtypshkronjapegi@yahoo.com

Hyrje

1 Thyesat dhe numrat dhjetorë

1.1	Vetia themelore e thyesave. Thjeshtimi i thyesave	8
1.2	Kthimi i thyesave në emërues të njëjtë. Krahاسimi i thyesave	10
1.3	Mbledhja dhe zbritja e thyesave	12
1.4	Shumëzimi dhe pjesëtimi i thyesave	14
1.5	Gjetja e pjesës dhe e së tërës	16
1.6	Kuptimi i numrit dhjetor	18
1.7	Mbledhja dhe zbritja e numrave dhjetorë	20
1.8	Shumëzimi i numrave dhjetorë	22
1.9	Pjesëtimi i numrave dhjetorë	24
1.10	Kthimi i thyesës së zakonshme në dhjetore	26
1.11	Numrat dhjetorë periodikë	28
1.12	Përqindja	30
1.13	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	32
1.14	Vlerësim	34

2 Gjeometria në rrafsh (1)

2.1	Përsëritje. Këndet dhe matja e tyre	36
2.2	Matja e këndeve	38
2.3	Gjetja e masës së këndeve që mungojnë	40
2.4	Konstruktive me këndmatës, kompas dhe vizore	42
2.5	Konstruktivi i disa këndeve të veçanta	44
2.6	Drejtëza normale (pingule)	46
2.7	Drejtëza paralele	48
2.8	Këndet që formohen në dy drejtëza paralele, kur ato priten nga një drejtëz e tretë	50
2.9	Largesat. Projektioni i pikës dhe i segmentit në drejtëz	52
2.10	Simetralja (përmesorja) e segmentit	54
2.11	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	56
2.12	Vlerësim	58

3 Numrat e plotë

3.1	Kuptimi i numrit të plotë. Mbledhja dhe zbritja	60
3.2	Shumëzimi i numrave të plotë	62
3.3	Pjesëtimi i numrave të plotë	64
3.4	Shprehje numerike me katër veprime me numra të plotë	66
3.5	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	68
3.6	Vlerësim	70

4 Numrat racionalë

4.1	Kuptimi i numrit racional	72
4.2	Vlera absolute e numrit. Krahاسimi i numrave racionalë	74

4.3	Mbledhja dhe zbritja e numrave racionalë	76
4.4	Shumëzimi dhe pjesëtimi i dy numrave racionalë	78
4.5	Shprehje aritmetike me numra racionalë	80
4.6	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	82
4.7	Vlerësim	84

5 Gjeometria në rrafsh (2)

5.1	Shumëkëndëshat. Shumëkëndëshat e rregullt	86
5.2	Konstruktimi i shumëkëndëshave të rregullt	88
5.3	Trekëndëshi. Shuma e këndeve të brendshme në trekëndësh	90
5.4	Këndet e jashtme të trekëndëshit	92
5.5	Katërkëndëshat. Shuma e këndeve të brendshme	94
5.6	Shuma e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit konveks	96
5.7	Diagonalet e shumëkëndëshave	98
5.8	Trapezi	100
5.9	Paralelogrami. Vetitë të paralelogramit	102
5.10	Drejkëndëshi. Rombi. Katrori	104
5.11	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	106
5.12	Vlerësim	108

6 Fuqitë

6.1	Kuptimi i fuqisë	110
6.2	Vetitë të fuqive	112
6.3	Vetitë të fuqive (vazhdim)	114
6.4	Trajta shkencore e shkrimit të numrit	116
6.5	Rrënja katrore e numrave jonegativë	118
6.6	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	120
6.7	Vlerësim	122

7 Raporte dhe përpjesëtime

7.1	Kuptimi i raportit	124
7.2	Zbatime të raportit	126
7.3	Shprehja e raportit në përqindje	128
7.4	Përpjesëtimet	130
7.5	Vetitë të tjera të përpjesëtimeve	132
7.6	Gjetja e kufizës së panjohur në një përpjesëtim. Rregulla e treshit	134
7.7	Varësia në përpjesëtim të drejtë	136
7.8	Paraqitja e objekteve me shkallë zvogëlimi apo zmadhimi	138
7.9	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	140
7.10	Vlerësim	142

8 Matja e madhësive gjeometrike

8.1	Përsëritje mbi njësitet e matjes së gjatësisë e të syprinës	144
8.2	Perimetri i shumëkëndëshit	146
8.3	Perimetri i rrethit	148

8.4	Teorema e Pitagorës	150
8.5	Teorema e anasjellë e Pitagorës	152
8.6	Zbatime të Teoremës së Pitagorës	154
8.7	Përsëritje. Kuptimi mbi syprinën. Syprina e drejtkëndëshit	156
8.8	Syprina e paralelogramit, e trekëndëshit Syprina e shumëkëndëshit të rregullt	158
8.9	Syprina e rombit, deltoidit dhe trapezit	160
8.10	Syprina e qarkut (sipërfaqes rrethore)	162
8.11	Syprinat e figurave të përbëra	164
8.12	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	166
8.13	Vlerësim	168

9 Shprehjet me ndryshore, ekuacione, inekuacione

9.1	Shprehje shkronjore (shprehje me ndryshore)	170
9.2	Vlera numerike e një shprehjeje shkronjore	172
9.3	Shprehje identike	174
9.4	Kufizat me ndryshore. Reduktimi i kufizave të ngjashme	176
9.5	Ekuacione me një ndryshore. Ekuacione të njëvlershme	178
9.6	Ekuacioni linear i trajtës $a \cdot x = b$ dhe ekuacione të njëvlershme me të	180
9.7	Problema që zgjidhen me ekuacione me një ndryshore	182
9.8	Inekuacione me një ndryshore	184
9.9	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	186
9.10	Vlerësim	188

10 Shndërrime gjeometrike dhe trupa gjeometrikë

10.1	Përsëritje. Sistemi kënddrejtë koordinativ. Koordinatat e pikës	190
10.2	Simetria sipas një drejtëze (simetria boshtore)	192
10.3	Drejhtëzat (boshtet) e simetrisë së figurave	194
10.4	Simetria qendrore	196
10.5	Shumëfaqëshit. Kubi dhe kuboidi	198
10.6	Prizmi	200
10.7	Piramida	202
10.8	Syprina e prizmit. Syprina e piramidës	204
10.9	Vëllimi i prizmit	206
10.10	Vëllimi i piramidës	208
10.11	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	210
11.12	Vlerësim	212

11 Funkzioni

11.1	Kuptimi i funksionit	214
11.2	Mënyra tabelare e dhënies dhe grafiku i funksionit	216
11.3	Dhënia e funksionit me formulë	218
11.4	Funksioni $y = kx$	220
11.5	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	222
11.6	Vlerësim	224

12 Statistika

12.1	Të dhënat e përshtatshme	226
12.2	Mbledhja e të dhënave	228
12.3	Mesataret dhe amplituda	230
12.4	Përdorimi i tabelave të frekuencave (dendurive)	232
12.5	Piktogramet	234
12.6	Diagrami me shtylla	236
12.7	Diagrami rrethor	238
12.8	Diagrami i frekuencave të grupuara për të dhëna diskrete	240
12.9	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	242
12.10	Vlerësim	244

13 Probabiliteti

13.1	Gjuha e probabilitetit	246
13.2	Probabiliteti statistikor	248
13.3	Probabiliteti teorik	250
13.4	Çfarë mësuam? (Përsëritje)	252
13.5	Vlerësim	254

Fjalor	255
Referenca	

Hyrje

Ky tekst është hartuar veçanërisht për nxënësit e klasës së shtatë të arsimit të mesëm të ulët. Ai është shkruar nga një grup autorësh dhe mësuesish me përvojë, si dhe është i pajisur me ushtrime, shpjegime e me materiale shtesë, që ndihmojnë në përvetësimin sa më të mirë të lëndës.

Çdo njësi mësimore fillon me një situatë problemore. Kërkimet dhe arsyetimet e nxënësve në lidhje me këtë situatë, do t'i nxisin ata të zbulojnë bazat e njohurive matematikore për të cilat do të mësojnë gjatë orës së mësimi.

Rubrika "Punë në grup" ndihmon të nxënësit aktiv dhe bashkëpunues. Nëpërmjet saj nxënësit nxiten të ndërtojnë disa njohuri matematikore në mënyrë të pavarur.

Ushtrimet e shoqëruara me këtë simbol përmbajnë zbatime të njohurive matematikore të njësive mësimore në jetën e përditshme. Ato kanë për qëllim të aftësojnë nxënësit në zbatimet praktike të njohurive matematikore.

Zgjidhja e ushtrimeve dhe problemave të rubrikës C kërkon zbatimin e njohurive teorike të paraqitura në rubrikën B.

Shembujt e zgjidhur japin zgjidhje model të shoqëruara me komentet përkatëse. Ato ndihmojnë nxënësin të kuptojnë konceptet teorike.

MATEMATIKA 7

8. MATJEA E MADHËSIVE GJEOMETRIKE

8.3 Perimetri i rrethit

A Kërkoni dhe zbuloni

Vizatoni një rreth me rreze 4 cm në një letër me ngjyrë. Priteni rrethin. Merrni një fije peri dhe rrethoni rrethin tuaj. Më pas matni gjatësinë e fijes për të gjetur gjatësinë e rrethit. Gjeneroni herësin e gjatësisë së rrethit me diametrin e tij. Përsëritni veprimet duke prerë rrethet me rreze të ndryshme. Çfarë vini re? Diskutoni me shokun/shoqen.



Fig. 8.7

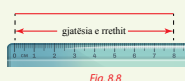


Fig. 8.8

Punë në grup

B Vrojtini dhe mësoni

Gjetja e perimetrit të rrethit nuk mund të realizohet drejtpërdrejt, sepse është e pamundur që vizorja të mbështetet në rreth. Për këtë arsye duhen gjetur mundësi të tjera, si ato që përmendim më lart. Një tjetër mënyrë për të gjetur gjatësinë e një rrethi prej teli është kjo: e presim telin në një pikë dhe më pas e shtrijmë atë sipas një drejtëze.

Punë në grup

Disa matje më të sakta të gjatësive të tre rrethëve janë paraqitur në tabelën e mëposhtme.

Rrethi	Diametri (cm)	Gjatësia e rrethit (afërsisht) (cm)	Herësi gjatësi/diametr
I	7	22	
II	10	31,4	
III	14	44	

Plotësoni kutitë për herësin.

Vini re se herësi $\frac{\text{perimetër}}{\text{diametr}}$ është i njëjtë për të tre rrethët.

2000 vjet më parë është zbuluar që për çdo rreth, raporti i perimetrit me diametrin e tij është një numër i caktuar. Ky numër shënohet me shkronjën e alfabetit grek π (lexohet pi), dhe është afërsisht i barabartë me $\frac{22}{7}$ ose 3,14 ($\pi \approx 3,14$). Duke shënuar me P perimetrin e rrethit dhe me d diametrin e tij, kemi: $\frac{P}{d} = \pi$.

Mbani mend!

Perimetri i rrethit me diametr d njehet me formulën: $P = \pi \cdot d$.
Meqë $d = 2R$, ku R është rrezja e rrethit, perimetri i rrethit jepet me formulën $P = 2\pi R$.

156

Shembulli 1

Gjeni perimetri i rrethit me rreze $R = 4$ cm.

Zgjidhje

Në formulën e perimetrit zëvendësojmë $R = 4$ cm dhe $\pi = 3,14$.
Kemi: $P = 2 \cdot 3,14 \cdot 4$ cm = 25,12 cm.

Shembulli 2

Perimetri i rrethit është 37,68 cm. Gjeni rrezën e tij.

Zgjidhje

Nga formula $P = 2\pi R$, kemi $R = \frac{P}{2\pi}$. Zëvendësojmë e kemi: $\frac{37,68 \text{ cm}}{2 \cdot 3,14} = 6$ cm.

C Ushtroni duke zbatuar

- Rrezja e një pjate rrethore është 11 cm. Gjeni perimetrin e pjatës.
- Në figurën 8.10 është paraqitur një gjysmëqark. Gjeni, me saktësi deri në të dhjetat e cm, perimetrin e gjysmëqarkut.



Fig. 8.10

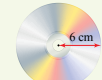


Fig. 8.11

- Rrezja e një CD është 6 cm. Gjeni diametrin dhe perimetrin.

USHTRIME

- Gjeni distancën që përshkon një rrotë me diametr 80 cm, kur bën 2 rrotullime.
- Një fije teli përbëhet nga dy gjysmërrathë. Gjeni gjatësinë e saj.

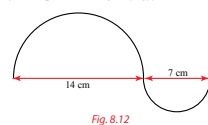


Fig. 8.12

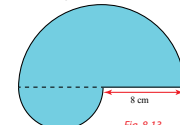


Fig. 8.13

- Gjeni perimetrin e figurës së ngjyrosur (fig. 8.13).
- Gjeni perimetrin e figurës së ngjyrosur (fig. 8.14).
- Rrota e një karroce e ka rrezën 30 cm.
a) Çfarë rrugë bën karroca, në qoftë se rrota e saj bën 200 rrotullime të plota?
b) Sa rrotullime ka bërë rrota e karrocës gjatë një rrugë prej 1 695,6 m?
- Perimetri i ekuatorit është 40 000 km. Gjeni rrezën e tokës në ekuator.

Fig. 8.14

157

Rubrika B përmban shpjegime teorike dhe shembuj që shpalosin konceptet dhe njohuritë matematikore të njësive mësimore.

Në rubrikën "Mbani mend" janë vendosur njohuri shumë të rëndësishme, të cilat duhen mbajtur mend, për të formuar shprehje dhe shkathtësi të qëndrueshme.

Në rubrikën "Ushtrime" gjenden ushtrime dhe problema, të cilat ndihmojnë në përfortimin e shprehjeve dhe të shkathtësive.

Problemat e shoqëruara me këtë simbol përmbajnë zbatime të njohurive të njësive mësimore nëpërmjet të dhënave sasiore të vërteta.

Në fillim të çdo teme paraqiten rezultatet e të nxëniet të lëndës për temën përkatëse, sipas programit të matematikës për klasën VII.

5

Gjeometria në rrafsh (2)

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- konstruktoren disa nga shumëkëndëshat e rregullt;
- zbulon marrëdhëniet e këndeve të brendshme (shuma e tyre është 180°) dhe këndeve të jashtme (shuma e tyre është 360°) të trekëndëshit me metoda të ndryshme (p.sh. duke rrotulluar qofet e lehtë, duke përdorur këndmatësin, etj.);
- njehson madhësitë e këndeve të trekëndëshit (të jashtme e të brendshme), kur dihen madhësitë e dy këndeve të tij;
- cakton shumën e këndeve të brendshme në shumëkëndësha dhe anasjells, nga shuma e dhënë cakton shumëkëndëshin përkatës;
- cakton numrin e diagonaleve të një shumëkëndëshi;
- përshkruan, emërtën dhe klasifikon katërkëndëshat në bazë të pozitës së brinjëve (paralelogram, trapez, trapezoidet).

Fjalë kyçe:
shumëkëndësh, shumëkëndësh i rregullt, kënde të brendshme, kënde të jashtme, shumë të këndeve të brendshme (të jashtme), madhësi e këndit, diagonale e shumëkëndëshit, paralelogram, trapez, trapezoidet.

A e DIN SE...?

Është vënë re se forma më e qëndrueshme në natyrë është sipërfaqja trekëndore. Nëse kemi një kator ose drejtkëndësh të formuar nga katër shufra metalike, ky mund të shndërrohet lehtësisht në paralelogram apo romboid. Kjo gjë nuk mund të ndodhë me një trekëndësh. Një figurë në formë trekëndore nuk mund të ndryshojë strukturën e saj. Kjo për arsye se çdo forcë që ushtrohet në të, përhapet në mënyrë të barabartë në të tri anët. Për këtë arsye trekëndëshat mund t'i gjëjmë gjithandej në botën që na rrethon: gjymtyrët e yllit të detit janë në formë trekëndore; rrieta e merimangës përbëhet nga figura trekëndore; egiptianët e lashtë ndërtuan piramidat e tyre me atë formë; velat e anijes janë bërë në formën e trekëndëshit që t'i rezistojnë erës etj. Përdorimi i trekëndësheve në ura bëri që këto të jenë më të forta, sepse trekëndëshat shpërndajnë në mënyrë të barabartë peshën, pa ndryshuar përmasat e tyre. Trekëndëshat janë mjete efektive për arkitekturin dhe përdoren në bazamentet e ndërtesave dhe strukturave të tjera, pasi ato sigurojnë forcë të qëndrueshmëri.

Në rubrikën "A e dini se..." paraqiten kuriozitetet ose një vështrim i shkurtër në historinë e matematikës, që lidhet me subjektin e temës.

Në fund të çdo teme, njësia "Vlerësim" ka për qëllim të ndihmojë nxënësit të testojnë dhe të vetëvlerësojnë njohuritë që kanë marrë gjatë temës.

MATEMATIKA 7

8.13 Vlerësim Koha: 45 minuta

- Përmasat e një drejtkëndëshi janë 2 cm, 8 cm. Gjeni:
 - diagonalen e drejtkëndëshit;
 - brinjën e katrorit që ka të njëjtën syprinë me drejtkëndëshin.
- Tregoni nëse është kënddrejtë trekëndëshi me brinjë 5 cm, 6 cm, 7 cm.
- Sa herë rritet syprina e qarkut, në qoftë se rrezja e tij rritet 2 herë?
- Është dhënë trekëndëshi kënddrejtë me katete 12 cm, 16 cm.
 - Gjeni hipotenuzën.
 - Gjeni lartësinë mbi hipotenuzën.
- Brinjët e një paralelogrami janë 12 cm dhe 20 cm. Lartësia mbi brinjën e parë është 10 cm. Gjeni:
 - syprinën e paralelogramit;
 - lartësinë mbi brinjën e dytë.
- Gjeni lartësinë më të vogël të trekëndëshit me brinjë 10 cm, 10 cm, 16 cm.
- Gjeni syprinën e figurave të përbëra.



- Gjeni syprinën e pjesës së ngjyrosur.

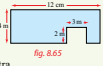
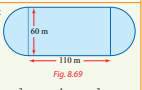
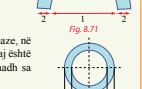
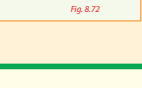

- Sipërfaqja me manushaqe në një lulishtë e ka formën si figurë. Njehsoni syprinën e saj.



Në këtë njësi mësimore do të gjeni një përmblendhje të të gjitha rezultateve të të nxëniet të temës. Secila prej tyre është e shoqëruar me ushtrime dhe problema, që nxisin nxënësit të provojnë shprehitë, shkathtësitë dhe aftësitë e tyre.

MATEMATIKA 7

8.12 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar	Provoji të zgjidhni
Zgjidhjen e njësive standarde për matje të gjatësisë, sipërfaqes, si dhe shprehimin e marrëdhënieve ndërmjet njësive të ndryshme të matjeve gjatë zgjidhjes së problemeve;	- Plotësoni me njësine matëse më të përshtatshme: - Gjatësia e lapit - - Përmasat e dritares - - Sipërfaqja e klasës - - Sipërfaqja bujqësore - - Gjatësia e Albit është 1,68 m, ndërsa e motrës së tij është 1,2 dm më pak. Sa është gjatësia e motrës së tij? - Gjeni perimetrin e figurës.  - Brinja e katrorit është 5 cm, 6 mm. Shprehni perimetrin e katrorit në: - centimetra; - milimetra. - Gjeni syprinën e trapezit me baza 18 cm e 12 cm dhe lartësi $a =$ bazës së vogël. - Gjeni gjatësinë e brinjës së panjohur në secilin nga trekëndëshat. Përdorni kalkulatorin për të gjetur një rrënjë të përafërt.  
Njehsimin e perimetrit në figura dimensionale me anë të formulave dhe me matje;	- A është kënddrejtë trekëndëshi me brinjë 7 cm, 12 cm, 13 cm? - Nëse brinjët e trekëndëshit kënddrejtë janë numra të plotë, sa mund të jetë brinja e tretë e tij nëse $a = 3$ cm, $b = 4$ cm? - Gjeni diagonalen e drejtkëndëshit me brinjë 12 cm dhe 16 cm. - Gjeni brinjën e trekëndëshit barabrinjës me lartësi 6 cm. - Në figurë jepet $AD = 2$ cm; $BD = 4$ cm dhe $CAB = 45^\circ$. Gjeni syprinën e trekëndëshit ABC. 
Vërtetimin dhe zbatimin e Teoremës së Pitagorës për njehsimin e gjatësisë së hipotenuzës apo katetit tek trekëndëshi kënddrejtë.	- Perimetri i tetëkëndëshit të rregullt është 56 cm. Gjeni gjatësinë e brinjës së tij. - Bazat e një trapezi janë 12 cm dhe 8 cm. Njëra nga brinjët anësore është sa gjysma e bazës së madhe, ndërsa brinja tjetër anësore është 1,5 herë sa baza e vogël. Gjeni perimetrin e trapezit. - Brinjët e një drejtkëndëshi janë në raportin 1 : 2. Gjeni syprinën e tij, në qoftë se perimetri është 24 cm. - ABCD është romb me brinjë 5 cm. Diagonalat e tij janë $AC = 8$ cm dhe $BD = 6$ cm. Gjeni OE.  - Rrezja e një rrethi është 5 cm. Sa është rrezja e rrethit me perimetër tri herë më të madhë? - Sa herë rritet perimetri i rrethit, në qoftë se rrezja e tij rritet katër herë? - Fusha e stadiumit përbëhet nga një drejtkëndësh dhe dy gjysma qarku. Gjeni syprinën e saj. Përmasat janë dhënë në metra.  - Gjeni perimetrin dhe syprinën e pjesës së ngjyrosur.  - Një pjesë e lulishtes e mbijell me lule, e ka formën si në figurë. Gjeni perimetrin dhe syprinën e saj.  - Të gjendet syprina e një unazë, në qoftë se diametri i vogël i saj është 4 cm, ndërsa diametri i madh sa 150% e diametrit të vogël. 

1

Thyesat dhe numrat dhjetorë

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

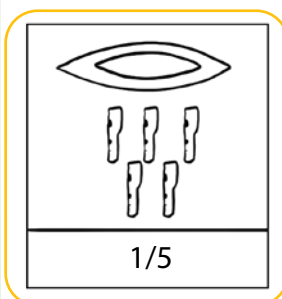
- dallon numrat racionalë pozitivë;
- krahason numrat racionalë;
- njehson shumën, ndryshimin, prodhimin dhe herësin e numrave racionalë;
- zbaton radhën e veprimeve aritmetike në shprehje numerike;
- përkufizon bashkësinë e numrave racionalë si bashkësi të mbyllur ndaj mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe pjesëtimit (në rastin kur pjesëtuesi nuk është zero);
- njehson vlerën e shprehjeve me numra racionalë;
- dallon numërorët që tregojnë të njëjtën sasi (p.sh.: $\frac{3}{5}$ është baras me 60% apo me 0.6);
- shndërron përqindjet në numra thyesorë, dhjetorë dhe anasjellas;
- kryen “veprimet” me përqindje (p.sh.: cakton vlerën e tërësisë kur dihet përqindja e një pjese të saj, cakton përqindjen e një pjese të tërësisë);
- modelon dhe zgjidh barazi dhe jobarazi, duke përdorur numra racionalë.



Fjalë kyçe:

numra racionalë pozitivë, numra natyrorë, thyesa, numra dhjetorë, shumë, ndryshim, prodhim, herës, shprehje aritmetike, përqindje.

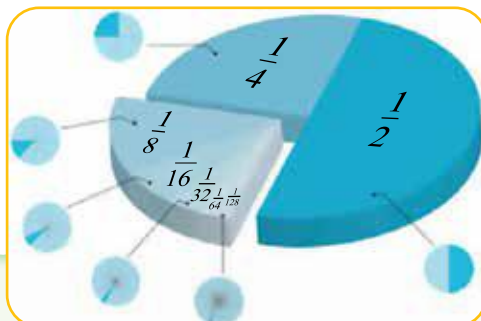
A E DINI SE...?



Koncepti i “thyesës”, siç e njohim dhe e përdorim ne sot, nuk ka ekzistuar në Europë, deri në shekullin XVII. Në fakt, në fillim, thyestat as nuk konsideroheshin si numra, por si një mënyrë për të krahasuar numrat e plotë me njëri-tjetrin. Fjala “thyesë” vjen nga latinishtja, *fractio*, që do të thotë “të thyesh”.

Egjiptianët i kanë përdorur thyestat që prej vitit 1800 p.e.s. Ata i shkruanin të gjitha thyestat duke përdorur atë që ne e quajmë thyesa njësi. Në Indinë e lashtë, thyestat shkruheshin pa vijë në mes. Ishin arabët ata

që shtuan vijën në mes, për të ndarë numëruesin dhe emëruesin. Ky lloj shkrimi përdoret edhe sot.



1.1 Vetia themelore e thyeseve. Thjeshtimi i thyeseve

A Kërkoni dhe zbuloni

Arba ka lexuar $\frac{1}{3}$ e faqeve të një libri, Arbi $\frac{4}{12}$ e po këtij libri, ndërsa Era lexoi $\frac{6}{18}$ e tij.

- A kanë lexuar të tre fëmijët të njëjtin numër faqesh?
- Po nëse do të kishin lexuar tre libra me numër të ndryshëm faqesh? Argumentoni përgjigjen.



B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Nëse shumëzojmë (ose pjesëtojmë) numëruesin dhe emëruesin e një thyese me të njëjtin numër (të ndryshëm nga zero), marrim një thyesë të barabartë me të parën.

Kjo njihet si vetia themelore e thyeseve.

Me barazim shkronjor, kjo veti shprehet në formën: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$; $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ (ku $b, c \neq 0$).

Vetia themelore e thyeseve na lejon të zëvendësojmë një thyesë me një thyesë të barabartë me të, por me një emërues tjetër, sipas dëshirës.

Shembulli 1

Zëvendësoni thyesën $\frac{3}{25}$ me një thyesë të barabartë me të, por me emërues 100.

Zgjidhje

Meqenëse $100 : 25 = 4$, shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin e thyesës së dhënë me 4.

$$\text{Kemi: } \frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100}.$$



Mbani mend:

Për ta thjeshtuar thyesën e dhënë deri në një thyesë të pathjeshtueshme, gjejmë PMP (pjesëtuesin më të madh të përbashkët) e numëruesit dhe të emëruesit të saj dhe i pjesëtojmë ata me këtë PMP.

Shembulli 2

Thjeshtoni thyesën $\frac{30}{48}$.

Zgjidhje

Gjejmë PMP e numrave 30 dhe 48, duke i zbërthyer ata në faktorë të thjeshtë.

		48	2
30	2	24	2
15	3	12	2
5	5	6	2
1		3	3
		1	

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ dhe } 48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

PMP e 30 dhe 48 është $2 \cdot 3 = 6$. Duke pjesëtuar numëruesin dhe emëruesin e thyesës së dhënë me 6, fitojmë barazimin $\frac{30}{48} = \frac{5}{8}$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Plotësoni me thyesa të barabarta:

a) $\frac{2}{5} = \dots$; b) $\frac{7}{9} = \dots$; c) $\frac{9}{10} = \dots$.

2. Thjeshtoni thyesën:

a) $\frac{12}{18} = \dots$; b) $\frac{24}{40} = \dots$; c) $\frac{90}{210} = \dots$.



3. Ora e mësimit zgjat 45 minuta. Beni thotë se ajo zgjat sa $\frac{9}{12}$ e orës kohore. Era e kundërshton, pasi sipas saj ajo zgjat $\frac{45}{60}$ të orës. Cili prej tyre ka të drejtë? Argumentoni përgjigjen.



USHTRIME

1 Shkruani thyesa të barabarta me thyesat e dhëna, duke i thjeshtuar ato.

a) $\frac{14}{21} = \dots$; b) $\frac{25}{30} = \dots$; c) $\frac{25}{75} = \dots$.

2 Vini në vend të pikave numrin e duhur:

a) $\frac{2}{5} = \frac{\dots}{20}$; b) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{24}$; c) $\frac{3}{7} = \frac{\dots}{49}$.

3 Thjeshtoni thyesat:

a) $\frac{12}{21} = \dots$; b) $\frac{22}{33} = \dots$; c) $\frac{36}{120} = \dots$; d) $\frac{24}{36} = \dots$.

4 Thjeshtoni thyesat:

$\frac{24}{50}$; $\frac{21}{49}$; $\frac{12}{28}$; $\frac{15}{25}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{24}{30}$; $\frac{40}{72}$.

5 Shprehni në minuta:

24 s; 36 s; 48 s; 50 s.

6 Klasa ka 36 nxënës, nga të cilët 14 janë vajza. Ç'pjesë të numrit të nxënësve përbëjnë djemtë?

7 Thjeshtoni thyesat:

a) $\frac{70a}{140a} = \dots$; b) $\frac{35n}{21n} = \dots$; c) $\frac{24x}{56x} = \dots$.

8 Për ç'vlera natyrore të shkronjave janë të barabarta thyesat?

a) $\frac{5}{6}$ dhe $\frac{m}{18}$; b) $\frac{1}{4}$ dhe $\frac{5}{x}$; c) $\frac{a}{3}$ dhe $\frac{3}{b}$; d) $\frac{x}{2}$ dhe $\frac{7}{y}$.

1.2 Kthimi i thyesave në emërues të njëjtë. Krahasoni i thyesave

A Kërkoni dhe zbuloni

Një pishinë mbushet nga dy burime uji. Nëse përdoret burimi i parë, pishina mbushet për 10 orë, kurse nëse përdoret i dyti, ajo mbushet për 14 orë.

Kur mbushet më shumë pishina: me të parin për 3 orë apo me të dytin për 7 orë?



B Vrojtoni dhe mësoni

Zakonisht, thyesat i kthejmë në **emëruesin më të vogël të përbashkët**. Për këtë, përdorim SHVP e emëruesve.



Mbani mend:

Për të kthyer thyesat në emëruesin më të vogël të përbashkët veprojmë kështu:

1. gjejmë SHVP (shumëfishin më të vogël të përbashkët) e emëruesve të thyesave;
2. pjesëtojmë këtë SHVP me emëruesin e secilës thyese, duke gjetur për secilën thyese faktorin plotësues;
3. shumëzojmë numëruesin e secilës thyese me faktorin plotësues përkatës.

Shembulli 1

Ktheni thyesat $\frac{11}{60}$ dhe $\frac{31}{168}$ në emërues të përbashkët.

Zgjidhje

Zbërthejmë secilin nga emëruesit në faktorë të thjeshtë.

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ dhe } 168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

SHVP e numrave 60 dhe 168 është prodhimi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, d.m.th. 840.

Për thyesën $\frac{11}{60}$, faktori plotësues do të jetë $840 : 60 = 14$. Prandaj $\frac{11}{60} = \frac{11 \cdot 14}{60 \cdot 14} = \frac{154}{840}$.

Për thyesën $\frac{31}{168}$, faktori plotësues do të jetë $840 : 168 = 5$. Prandaj $\frac{31}{168} = \frac{31 \cdot 5}{168 \cdot 5} = \frac{155}{840}$.

Ju dini se nga dy thyesa me emërues të njëjtë, më e madhja është ajo që ka numëruesin më të madh.

Për të krahasuar dy thyesa me emërues të ndryshëm, në fillim i kthejmë ato në thyesa me emërues të njëjtë.

Shembulli 2

Krahasoni thyesat $\frac{5}{24}$ dhe $\frac{7}{30}$.

Zgjidhje

I kthejmë thyesat në thyesa me emërues të njëjtë.

Duke zbërthyer në faktorë të thjeshtë emëruesit, gjejmë: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ dhe $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

SHVP e 24 dhe 30 është prodhimi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Për thyen $\frac{5}{24}$, faktori plotësues është $120 : 24 = 5$. Prandaj $\frac{5}{24} = \frac{5 \cdot 5}{24 \cdot 5}$, d.m.th. $\frac{5}{24} = \frac{25}{120}$.

Për thyen $\frac{7}{30}$, faktori plotësues është $120 : 30 = 4$. Prandaj $\frac{7}{30} = \frac{7 \cdot 4}{30 \cdot 4} = \frac{28}{120}$.

Kemi $\frac{25}{120} < \frac{28}{120}$, pra $\frac{5}{24} < \frac{7}{30}$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Ktheni në emërues të përbashkët thyen $\frac{3}{24}$ dhe $\frac{11}{30}$.
2. Një punëtor përgatiti 16 (pjesë makinash) të njëjta për 6 orë, kurse një tjetër përgatiti 24 detale të tilla për 15 orë. Cili punon më shpejt?
3. Krahasoni thyen $\frac{11}{18}$ dhe $\frac{7}{12}$.
4. Cili interval kohe është më i gjatë: $\frac{4}{15}$ apo $\frac{3}{10}$ e orës?

USHTRIME

- 1 Ktheni në emëruesin më të vogël të përbashkët thyen:
 - a) $\frac{3}{10}$ dhe $\frac{5}{20}$;
 - b) $\frac{3}{4}$ dhe $\frac{5}{12}$;
 - c) $\frac{4}{9}$ dhe $\frac{7}{15}$;
 - d) $\frac{11}{20}$ dhe $\frac{9}{16}$.
- 2 Thjeshtoni thyen $\frac{13}{15}$; $\frac{13}{26}$; $\frac{15}{40}$; $\frac{24}{32}$ dhe pastaj kthejini ato në thyen me emërues të përbashkët 24.
- 3 Cila thyen është më e madhe?
 - a) $\frac{9}{14}$ apo $\frac{14}{21}$;
 - b) $\frac{13}{18}$ apo $\frac{11}{15}$;
 - c) $\frac{4}{15}$ apo $\frac{5}{20}$.
- 4 Renditini thyen në rritje:
 - a) $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{11}{30}$;
 - b) $\frac{11}{12}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$.
- 5 Vërtetoni mosbarazimin:
 - a) $\frac{123}{800} > \frac{1}{8}$;
 - b) $\frac{361}{6000} < \frac{1}{15}$.
- 6 Në një libër, vizatimet përbëjnë $\frac{2}{11}$ e tij, kurse tabelat $\frac{3}{22}$ e tij. Cilat zënë më tepër vend në libër, vizatimet apo tabelat?
- 7 Albani, një distancë prej 16 m e përshkon me 16 hapa të gjatësisë së njëjtë, kurse Albana, me 10 hapa të gjatësisë së njëjtë, përshkon një gjatësi prej 7 m. Cili nga këta të dy e ka hapin më të shkurtër?

1.3 Mbledhja dhe zbritja e thyesave

A Kërkoni dhe zbuloni

Agimi luajti futboll për $\frac{9}{10}$ orë dhe më pas luajti volejboll për $\frac{8}{15}$ orë.

- Sa orë më shumë luajti ai futboll se volejboll?
- Sa orë luajti gjithsej?



B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Për të mbledhur (zbritur) dy thyesa me emërues të njëjtë, mbledhim (zbresim) numëruesit e tyre, kurse emëruesin e lëmë ashtu siç është.

Me ndihmën e shkronjave, këto rregulla shkruhen kështu:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad (\text{kur } a > b).$$



Mbani mend:

Për të mbledhur (zbritur) thyesat me emërues të ndryshëm, më parë i kthejmë ato në thyesa me emërues të njëjtë.

Shembulli 1

Gjeni shumën dhe ndryshimin e thyesave $\frac{9}{20}$ dhe $\frac{3}{16}$.

Zgjidhje

I kthejmë thyesat në emëruesin më të vogël të përbashkët. Duke zbërthyer emëruesit në faktorë të thjeshtë, kemi: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ dhe $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

SHVP e numrave 20 dhe 16 është prodhimi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 80$.

Për thyesën $\frac{9}{20}$, faktori plotësues është $80 : 20 = 4$. Prandaj $\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 4}{20 \cdot 4} = \frac{36}{80}$.

Për thyesën $\frac{3}{16}$, faktori plotësues është $80 : 16 = 5$. Prandaj $\frac{3}{16} = \frac{3 \cdot 5}{16 \cdot 5} = \frac{15}{80}$.

Atëherë:

$$\frac{9}{20} + \frac{3}{16} = \frac{36}{80} + \frac{15}{80} = \frac{51}{80};$$

$$\frac{9}{20} - \frac{3}{16} = \frac{36}{80} - \frac{15}{80} = \frac{21}{80}.$$

Shembulli 2

Zgjidhni ekuacionin $x + \frac{3}{12} = \frac{7}{15}$.

Zgjidhje

Duke kaluar kufizën $\frac{3}{12}$ në anën tjetër, me shenjë të ndërruar, kemi:

$$x = \frac{7}{15} - \frac{3}{12}. \text{ Por, } \frac{7}{15} = \frac{28}{60} \text{ dhe } \frac{3}{12} = \frac{15}{60}. \text{ Prandaj } x = \frac{28}{60} - \frac{15}{60} = \frac{13}{60}.$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Kryeni veprimet:

a) $\frac{1}{2} + \frac{5}{8}$; b) $- - \frac{3}{14}$; c) $\frac{5}{9} - \frac{5}{12}$; d) $\frac{19}{21} - \frac{11}{15}$.

2. Gjeni vlerën e shprehjes $\frac{x}{12} - \frac{1}{x}$, nëse $x = 4$; $x = 5$; $x = 6$.

3. Fermeri punoi $\frac{1}{6}$ e arës orën e parë, $\frac{1}{5}$ e arës orën e dytë dhe $\frac{1}{4}$ e arës orën e tretë. Ç'pjesë të arës punoi ai për 3 orë? Ç'pjesë e arës mbeti e papunuar?

USHTRIME

1 Kryeni veprimet:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; c) $\frac{5}{42} + \frac{10}{63}$; d) $\frac{21}{22} - \frac{3}{55}$.

2 Gjeni vlerën e shprehjeve:

a) $\frac{19}{20} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$; b) $\frac{1}{30} + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right)$.

3 Zgjidhni ekuacionet:

a) $x + \frac{4}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$; b) $y - \frac{5}{20} = \frac{5}{8} - \frac{3}{10}$; c) $\left(\frac{4}{5} - x\right) + \frac{13}{20} = \frac{25}{30}$.

4 Gjeni vlerën e shprehjes $\frac{a}{10} + \frac{a}{15}$, nëse: $a = 1$; $a = 2$; $a = 5$; $a = 7$.

5 Ditën e parë u shtruan me asfalt $\frac{3}{20}$ km rrugë, kurse ditën e dytë $\frac{1}{5}$ km më tepër se ditën e parë. Sa km rrugë u shtruan me asfalt në këto dy ditë?

6 Perimetri i trekëndëshit ABC është $\frac{17}{20}$ m. Brinja AB është $\frac{17}{50}$ m, brinja BC është $\frac{9}{50}$ m më e shkurtër se AB. Gjeni brinjën AC.



7 Ditën e hënë, Zana shpenzoi $\frac{3}{4}$ e një orë për detyrat e matematikës dhe $\frac{1}{2}$ e një orë për detyrat e gjuhës. Sa kohë shpenzoi Zana për detyrat e shtëpisë ditën e hënë?

Të mërkurën ajo shpenzoi $\frac{2}{3}$ e një orë për detyrat e gjuhës së huaj dhe 15 minuta për të shkruar një ese. Sa kohë shpenzoi të mërkurën? Sa kohë shpenzoi gjithsej për detyrat gjatë këtyre dy ditëve?

1.4 Shumëzimi dhe pjesëtimi i thyesave

A Kërkoni dhe zbuloni

Një shishe përmban $\frac{3}{4}\ell$ ujë të gazuar. Sa ℓ ujë të gazuar përmbajnë 5 shishe të tilla? Sa ℓ ujë të gazuar përmban gjysma e shishes? Argumentoni përgjigjen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Për të shumëzuar një thyesë me një numër natyror, duhet të shumëzojmë me këtë numër numëruesin, kurse emëruesin e lëmë të pandryshuar.



Mbani mend:

Për të shumëzuar një thyesë me një tjetër thyesë, veprojmë kështu:

1. gjejmë prodhimin e numëruesve dhe pastaj prodhimin e emëruesve të thyesave;
2. prodhimi është thyesa që ka si numërues prodhimin e numëruesve, kurse si emërues ka prodhimin e emëruesve.

Shkruajmë $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, bëjmë thjeshtime të mundshme dhe më tej përfundojmë shumëzimet.

Në fund, nëse është e mundur, veçojmë pjesën e plotë.

Shembulli 1

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{10} = \frac{4 \cdot 14}{7 \cdot 10} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Për të kryer shumëzimin e numrave të përzier, ata i kthejmë më parë në thyesa të parregullta.

Shembulli 2

Kryeni shumëzimin $\left(9\frac{3}{5}\right) \cdot \left(1\frac{5}{12}\right)$.

Zgjidhje

$$\text{Kemi } 9 + \frac{3}{5} = \frac{9 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{48}{5} \text{ dhe } 1 + \frac{5}{12} = \frac{1 \cdot 12 + 5}{12} = \frac{17}{12}.$$

$$\text{Atëherë } \left(9\frac{3}{5}\right) \cdot \left(1\frac{5}{12}\right) = \frac{48}{5} \cdot \frac{17}{12} = \frac{48 \cdot 17}{5 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 17}{5 \cdot 12} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}.$$

Shumëzimi i thyesave gëzon vetinë e ndërrimit dhe atë të shoqërimit.

Veç kësaj, për çdo thyesë $\frac{a}{b}$, kemi $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$; $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$.



Mbani mend:

Thyesat $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{b}{a}$ quhen të anasjella të njëra-tjetrës. Prodhimi i tyre është 1 ($a, b \neq 0$).

Për të pjesëtuar një thyesë me një tjetër, shumëzojmë thyesën e parë me të anasjellën e thyesës së dytë.

Shembulli 3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{12}{5} : \frac{16}{15} &= \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 16} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{9}{4}; \\ \text{b)} \quad \frac{8}{7} : 6 &= \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8 \cdot 1}{7 \cdot 6} = \frac{4}{7 \cdot 3} = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Gjeni: a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$; b) $1 : \frac{3}{4}$.
- Kryeni veprimet: a) $\frac{4}{5} : \frac{4}{7}$; b) $\frac{3}{8} : 3$; c) $2 : \frac{10}{11}$.
- Sa km përshkon çiklisti për $1\frac{5}{12}$ orë, nëse lëviz me shpejtësi $9\frac{3}{5}$ km/orë?
- Masa e një druri pishe me vëllim $\frac{4}{5} \text{ dm}^3$ është $\frac{2}{5}$ kg.
 - Sa është masa e 1 dm^3 dru pishë?
 - Cili është vëllimi i drurit me masë 1 kg?



USHTRIME

- Për 1 orë, një fabrikë prodhon $\frac{11}{25}$ kv plastmasë. Sa kv plastmasë prodhon linja për $\frac{3}{4}$ orë?
- Kryeni veprimet:
 - $\frac{3}{8} \cdot 2$; b) $\frac{2}{3} \cdot 1$; c) $\frac{19}{20} \cdot 0$.
- Brinja e katrorit është $\frac{7}{8}$ m. Gjeni:
 - perimetrin e katrorit; b) syprinën e katrorit.
- Gjeni perimetrin e trekëndëshit ABC, nëse $AB = \frac{2}{15}$ m, gjatësia e segmentit [BC] është 4 herë më e madhe se gjatësia e [AB], kurse gjatësia e [AC] është $\frac{1}{5}$ m më e vogël se gjatësia e [BC].
- Kryeni veprimet:
 - $\frac{12}{25} \cdot \frac{9}{16}$; b) $\frac{11}{15} \cdot \frac{3}{5}$; c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$; d) $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{2}{3}$.
- Gjeni vlerën e shprehjes $\frac{4}{9}x$, nëse:
 - $x = \frac{1}{4}$; b) $x = \frac{4}{9}$; c) $x = 4\frac{1}{2}$.
- Gjeni masën e një detali metalik me vëllim $3\frac{1}{3} \text{ dm}^3$, nëse masa e 1 dm^3 të këtij metali është $7\frac{4}{5}$ kg.

1.5 Gjetja e pjesës dhe e tërësisë

A Kërkoni dhe zbuloni

Tabela e mëposhtme jep çmimet e disa artikujve në euro.

Artikulli	Këpucë	Xhinse	Pallto	Çantë
Çmimi	35 €	30 €	72 €	?



- a) Çmimi i këpucëve u ul për $\frac{1}{5}$ e çmimit fillestar, i xhinseve është ulur për $\frac{1}{3}$, i palltos për $\frac{1}{4}$. Gjeni sa euro më pak kushtojnë një pulovër, një palë xhinse dhe një pallto.
- b) Çmimi i çantës është ulur për 15 euro, që është $\frac{1}{4}$ e çmimit. Gjeni sa euro ishte çmimi i çantës.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Për të gjetur pjesën (e shprehur me thyesë) e një numri, mjafton të shumëzohet këtë numër me thyesën e dhënë.

Shembulli 1

Nga 80 000 banorë të një qyteti, $\frac{3}{5}$ banojnë në pallate. Sa banorë banojnë në pallate?

Zgjidhje

Numri i banorëve që banojnë në pallate është sa $\frac{3}{5}$ e 80 000, d.m.th. është

$$\frac{3}{5} \cdot 80\,000 = \frac{3 \cdot 80\,000}{5} = \frac{240\,000}{5} = 48\,000 \text{ banorë.}$$


Mbani mend:

Për të gjetur një madhësi të panjohur, kur njohim një pjesë të saj (të shprehur me thyesë), mjafton të pjesëtojmë këtë numër me këtë thyesë.

Shembulli 2

32 000 banorë të një qyteti janë të siguruar. Ky numër përbën $\frac{2}{5}$ e numrit total të banorëve të qytetit. Sa banorë ka qyteti?

Zgjidhje

Numri i banorëve të qytetit është: $32\,000 : \frac{2}{5}$, d.m.th. $32\,000 \cdot \frac{5}{2} = \frac{160\,000}{2} = 80\,000$ banorë.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Udhëtari bëri 20 km rrugë në dy ditë. Ditën e parë ai përshkoi $\frac{3}{4}$ e kësaj rruge.
Sa km bëri udhëtari:
a) ditën e parë?; b) ditën e dytë?
- Në bibliotekën e shkollës gjenden 4900 libra artistikë, që përbëjnë $\frac{7}{9}$ e sasisë totale të librave. Sa libra gjithsej ka në bibliotekën e shkollës?
- Kopshti zë $\frac{4}{5}$ e oborrit. Me patate është mbjellë $\frac{2}{3}$ e kopshtit. Ç'pjesë e oborrit është mbjellë me këtë bimë?

**USHTRIME**

- Kopshti ka sipërfaqe 200 m². Me domate janë mbjellë $\frac{45}{100}$ e kësaj sipërfaqeje. Sa m² janë mbjellë me domate?
- Libri ka 140 faqe. Ana lexoi $\frac{8}{10}$ e librit. Sa faqe i mbetën pa lexuar?
- Masa e një deleje është 85 kg. Masa e një qengji është sa $\frac{1}{5}$ e masës së deles. Sa është masa e deles së bashku me qengjin?
- Në ekspozitë ka 72 vepra arti. — e tyre janë piktura me akualet, kurse $\frac{1}{4}$ janë vizatime me laps. Sa është numri i vizatimeve me laps?
- Një qytet ka 75 000 banorë. Çdo vit, popullata e tij rritet me $\frac{2}{100}$ e saj. Sa banorë do të ketë pas: a) 1 viti? b) 2 vjetësh?
- 800 m² të një piste avioni janë pastruar nga bora. Ato përbëjnë $\frac{2}{5}$ e pistës. Sa m² është pista?
- Në një fermë u mbollën 24 ha me grurë. Kjo sipërfaqe përbën $\frac{8}{10}$ e tokës së fermës. Sa ha është toka e fermës?
- Gjatë tharjes, kumbulla humb $\frac{85}{100}$ e masës së vet. Sa kg kumbulla duhen përdorur për të marrë 170 kg kumbulla të thata?
- Mielli i grurit përbën mesatarisht $\frac{3}{5}$ e masës së bukës.
 - Ç'masë mielli përmban një bukë 400-gramëshe?
Po ajo 800-gramëshe?
 - Duke ditur se nevojitet afërsisht 1 m² tokë bujqësore për të prodhuar $\frac{2}{3}$ kg miell gruri, ç'masë mielli mund të prodhohet në 7,5 ha tokë bujqësore?



1.6 Kuptimi i numrit dhjetor

A Kërkoni dhe zbuloni

Një sasi eurosh do të ndahet ndërmjet tre shokëve: Arbrit, Bardhytit dhe Zanës.

– Secili nga ne do të marrë nga $\frac{3}{10}$ e eurove, – tha Arbri.

– Jo, – tha Bardhyti, – secili nga ne do të marrë nga $\frac{30}{100}$.

Ndërsa Zana mendon që secili prej tyre të marrë nga 0,3 pjesë të eurove, ose 0,30.

Në cilin nga tri propozimet mbeten euro pa ndarë? Argumentoni.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Çdo thyesë tek e cila emëruesi shprehet nga një njësh i ndjekur pas prej disa zerosh, mund të shkruhet në trajtë dhjetore. Në këtë trajtë, pas pjesës së plotë vendoset presja dhe pastaj shkruajmë numëruesin me po aq shifra sa zerot e emëruesit.

P.sh. numri $\frac{8}{10}$ shkruhet 0,8. Numri $2\frac{7}{10}$ shkruhet 2,7. Numri $\frac{24}{1000}$ shkruhet 0,024

Nëse në fund të një numri dhjetor shtojmë ose heqim zero, atëherë merret një numër dhjetor i barabartë me atë të fillimit.



Mbani mend:

Për të krahasuar dy numra dhjetorë, duhet të barazojmë në fillim, tek ata, numrin e shifrave dhjetore (duke shtuar, po të jetë e nevojshme, zero në të djathtë të njërit prej tyre) dhe pastaj duke hequr presjet, të krahasojmë numrat natyrorë që merren.



Mbani mend:

Për të bërë rrumbullakimin e numrave dhjetorë, veprojmë kështu:

1. në fillim heqim të gjitha shifrat pas rendit deri në të cilin po rrumbullakojmë;
2. nëse pjesa që heqim fillon me shifër më të vogël se 5, numri i mbetur jep rrumbullakimin e kërkuar;
3. nëse pjesa e hequr fillon me shifër më të madhe ose baras me 5, shifra e fundit e pjesës së mbetur duhet zmadhuar me 1.

Shembull

Rrumbullakimi i numrit 2,361 deri në të dhjetat jep 2,4; kurse rrumbullakimi deri në të dhjetat i numrit 4,547 jep 4,5.

Thyesat dhjetore dhe sistemi metrik i njësive



Punë në grup

Dini që 1 cm = 10 mm; 1 m = 100 cm; 1 km = 1000 m.
Plotësoni: 1 mm = ... cm; 1 cm = ... m; 1 m = ... km.

Thjeshtësia e veprimeve me numrat dhjetorë ndikoi në veprimtarinë matëse të njerëzve. Ata kaluan në një sistem të ri të matjes së madhësive, të ashtuquajturin **sistem metrik të njësive**. Në këtë sistem, një njësi matjeje merret nga tjetra, duke shumëzuar apo pjesëtuar me 10, 100, 1000 etj. Është me interes të vëmë në dukje se në garat e sotme sportive, ku sekonda duhet të ndahet në pjesë për saktësi matjeje, përdoret një sistem i përzier i matjes së kohës. Sekondën e ndajnë jo në 60 pjesë të barabarta, por në të dhjeta, të qindta, të mijta. Prandaj dëgjojmë shprehje, si: “vrapuesi i përshkoi 100 m për 9,95 sekonda”.

C Ushtroni duke zbatuar

- Krahasoni numrat dhjetorë:
a) 34,07 me 61,2; b) 37,8 me 37,80; c) 0,6 me 0,582; d) 7,3451 me 7,3449.
- Rrumbullakoni numrin 6,3452.
a) deri në njësi; b) deri në të dhjetat;
c) deri në të qindtat; d) deri në të mijtat.
-  Në ashensorin që mban deri në 400 kg u vendosën 4 pako me peshë 98,75 kg secila. A është e tepërt kjo ngarkesë?

USHTRIME

- Shkruani si numra dhjetorë:
 $3\frac{2}{10}$; $4\frac{15}{100}$; $\frac{315}{1000}$; $2\frac{7}{100}$; $\frac{25}{1000}$; $\frac{625}{10000}$.
- Shprehni:
a) në centimetra: 5 cm 2 mm; 27 mm; 5 mm.
b) në kilogramë: 3 kg 225 g; 1 254 g; 2 kg 10 g.
c) në tonë: 3 t 357 kg; 2568 kg; 2 t 3 kv; 5 t 7 kg.
- Shkruani si thyesa të zakonshme: 0,5; 2,34; 5,01; 0,734; 2,003.
- Çfarë shifre duhet të vihet në vend të shkronjës x , që të merret mosbarazim i vërtetë:
a) $3, x5 > 3,05$; b) $6,45 < 6,4x$.
- Është dhënë numri dhjetor 0,844012. Fshini një nga shifrat pas presjes, në mënyrë që numri: a) të rritet; b) të zvogëlohet. Shqyrtoni të gjitha rastet e mundshme.
- Bukën që peshon 2,5 kg e ndajmë në 8 pjesë të barabarta. Gjeni masën e çdo pjese, duke rrumbullakuar rezultatin deri në të qindtat.
- Çiklisti udhëtoi 3,45 orë me shpejtësi 24,75 km/orë. Gjeni sa rrugë përshkoi ai, duke e rrumbullakuar rezultatin deri në të qindtat.
-  Ajri që thithim përmban një sasi shumë të madhe grimcash shumë të imëta, përmasat e të cilave maten me mikron ($\mu\text{m} = 0,001 \text{ mm}$). Tabela e mëposhtme tregon rendin e madhësisë së këtyre grimcave.

Grimca	pluhur drurësh	tym i zi	polen	baktere	viruse	karburante
Përmasat (μm)	3	0,3	20	1,8	0,09	0,4

Renditini këto pjesëza në zbritje sipas përmasave.

1.7 Mbledhja dhe zbritja e numrave dhjetorë

A Kërkoni dhe zbuloni

Tabela e mëposhtme tregon çmimet e biletave të udhëtimit:

Prishtinë-Prizren	4,6 €
Prizren-Gjakovë	2,8 €
Gjakovë-Tiranë	10,4 €

- a) Gjeni sa euro kushton udhëtimi Prishtinë-Prizren-Gjakovë-Tiranë?
 b) Nëse Agroni ka 250 euro, sa euro i teprojnë nga udhëtimi?
 Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.



B Vrojtuni dhe mësoni



Mbani mend:

Për të mbledhur (zbritur) dy numra dhjetorë veprojmë kështu:

1. barazojmë numrin e shifrave pas presjes dhjetore në të dy numrat, nëse ai numër nuk është i njëjtë, duke shkruajtur “0” pas shifrës së fundit të numrit me më pak shifra.
2. i shkruajmë ata poshtë njëri-tjetrit, në mënyrë që presja të shkruhet nën presje dhe shifrat e rendeve të njëjta të jenë nën njëra-tjetrën;
3. bëjmë mbledhjen (zbritjen) njësoj si për numrat natyrorë, pa marrë parasysh presjet;
4. te numri i gjetur vendosim shenjën e presjes, nën shenjat e presjeve të dy numrave që mblidhen (zbriten).

Shembull

Të zgjidhet ekuacioni $4,5 - x = 2,136$.

Zgjidhje

Sipas kuptimit të ndryshimit, kemi $x = 4,5 - 2,136$.

Te numri 2,136 kemi tri shifra pas presjes dhjetore, prandaj edhe te numri 4,5 duhet të kemi tri shifra pas presjes dhjetore.

Shkruajmë $4,5 = 4,500$.

Gjejmë tani ndryshimin e 4,500 me 2,136.

$$\begin{array}{r} 4,500 \\ - 2,136 \\ \hline 2,364 \end{array} \quad \text{Përgjigje: } x = 2,364.$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. A është kryer saktë mbledhja?

$$\begin{array}{r} 3,26 \\ + 2,5 \\ \hline 3,51 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,26 \\ + 2,5 \\ \hline 5,31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,26 \\ + 2,5 \\ \hline 5,76 \end{array}$$

2. Zgjidhni ekuacionet:

a) $x + 5,04 = 5,4$; b) $6,204 - x = 6,2$.

3. a) Nga cili numër duhet të zbresim 0,33, që të marrim 0,88?
b) Cilit numër i duhet shtuar 1,9, që të marrim 21,1?



4. Largesia midis dy fshatrave është 15 km. Një udhëtar, i cili është nisur nga njëri fshat për të shkuar në fshatin tjetër, bëri 5,2 km orën e parë. Në orën e dytë bëri 0,5 km më pak se në orën e parë, kurse në orën e tretë bëri 0,9 km më pak se në orën e dytë. Sa km rrugë i mbetën atij për të bërë?

USHTRIME

- 1 Kryeni mbledhjet:

a) $12,31 + 7,54$; b) $50,24 + 9,41$; c) $1,74 + 18,05$; d) $1,04 + 10,04$.

- 2 Kryeni zbritjet:

a) $0,438 - 0,212$; b) $2,85 - 1,33$; c) $3,43 - 0,26$; d) $0,202 - 0,111$.

- 3 A është kryer saktë zbritja?

2,72 2,72 2,72
a) $\begin{array}{r} -1,3 \\ 25,9 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} -1,3 \\ 1,69 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} -1,3 \\ 1,42 \end{array}$

- 4 Kryeni zbritjet:

a) $10,3 - 5,42$; b) $8,405 - 0,23$; c) $96,6 - 7,63$; d) $51 - 2,31$.

- 5 Gjeni vlerën e shprehjeve:

a) $1,6 + 3,7 + 4,8 + 5,9$; b) $2,5 - 1,8 + 2,43 - 1,7$; c) $20 - (0,8 + 0,03) - 1,9$.

- 6 Në dy bidonë janë hedhur 15,4 litra benzinë. Në njërin prej tyre ka 3,4 litra më pak se në të dytin. Sa benzinë kishte në secilin bidon?

- 7 Shkruani dy kufiza pasuese në vargun e numrave: 3,75; 3,5; 3,25; ...; ...;

- 8 Papagalli, kanarina dhe trumcaku hëngrën së bashku 45,6 g fara. Papagalli dhe kanarina së bashku hëngrën 29,9 g, kurse kanarina dhe trumcaku hëngrën 25,1g. Sa g fara hëngri secili zog?

- 9 Gjeni numrat nëse:

- a) Shuma e dy numrave është 1,02. Njëri numër është 0,23.
b) Shuma e dy numrave është 12. Njëri është për 2,67 më i madh se tjetri.
c) ndryshimi i dy numrave është 5,2. Njëri nga numrat është për 0,5 më i madh se tjetri.



Tabela e mëposhtme jep vendet me të cilat kufizohet Kosova. Gjeni gjatësinë e vijës kufitare të Kosovës.

Vendet me të cilat kufizohet	Shqipëria	Maqedonia	Mali i Zi	Serbia
Gjatësia e vijës kufitare	111,8 km	158,7 km	78,6 km	351,6 km

1.8 Shumëzimi i numrave dhjetorë

A Kërkoni dhe zbuloni

Një çiklist udhëton me një shpejtësi mesatare 22,5 km/orë. Nëse çiklisti udhëton 1 orë e 30 minuta, sa km rrugë ka përshkuar? Po nëse udhëton 1,5 orë? Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.



B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Për të shumëzuar një numër dhjetor me një numër natyror, veprojmë kështu:

1. shumëzojmë numrat, pa marrë parasysh presjet;
2. në prodhimin e gjetur vendosim presjen, në mënyrë që pas saj të ketë aq shifra sa ka te numri dhjetor pas presjes.



Punë në grup

Merrni një numër dhjetor. Shumëzoni numrin me 10, 100, 1000 etj. Përsëritni veprimin me disa numra dhjetorë. Çfarë vini re?



Mbani mend:

Për të shumëzuar numrin dhjetor me 10, 100, 1000 etj., veprojmë kështu:

- a) Fillimisht bëjmë që numri dhjetor të ketë aq shifra pas presjes, sa ka zero shumëzuesi pas njëshit.
- b) Pastaj zhvendosim presjen dhjetore aq shifra djathtas, sa zero ka te shumëzuesi pas njëshit.



Mbani mend:

Për të shumëzuar dy numra dhjetorë, veprojmë kështu:

1. kryejmë shumëzimin e numrave pa marrë parasysh presjet;
2. në prodhimin e gjetur vendosim presjen, duke lënë në të djathtë të saj aq shifra sa është shuma e shifrave që kanë pas presjeve të dy numrat që shumëzohen.

Shembull

Sa është syprina e një dhome drejtkëndëshe me përmasa 3,52 m dhe 4,03 m?

Zgjidhje

Dimë se syprina e drejtkëndëshit gjendet duke shumëzuar dy përmasat e tij. Pra:

$S = 3,52 \text{ m} \cdot 4,03 \text{ m}$. Gjejmë në fillim prodhimin $352 \cdot 403$.

$$\begin{array}{r}
 352 \\
 \cdot 403 \\
 \hline
 1056 \\
 000 \\
 1408 \\
 \hline
 141856
 \end{array}$$

Pas presjes duhet të lëmë katër shifra. (Pse?) $S = 14,1856 \text{ m}^2$, pra $S \approx 14,2 \text{ m}^2$.

C Ushtroni duke zbatuar

- Kryeni shumëzimet:
a) $3,4 \cdot 2,3$; b) $6,41 \cdot 1,2$; c) $3,44 \cdot 2,57$.
- Shkruani si numër natyror:
a) 1,5 mijë; b) 0,8 mijë; c) 2,5 milionë; d) 0,9 milionë.
- Pa bërë njehsimet, tregoni se cili numër është më i madh:
a) $2,76 \cdot 3,1$ dhe $2,76$; b) $41,2 \cdot 0,2$ dhe $41,2$;
c) $5 \cdot 0,3$ dhe $0,3$; d) $0,4 \cdot 0,37$ dhe $0,4$.
- Shpejtësia e zërit në ajër është $0,33 \text{ km/s}$. Sa larg ka rënë rrufeja nëse, pasi patë vetëtimën, kaluan 5 sekonda kur dëgjuat bubullimën? Po nëse kaluan 10 sekonda?



USHTRIME

- Kryeni shumëzimet:
a) $1,25 \cdot 4$; b) $1,25 \cdot 50$; c) $1,25 \cdot 25$.
- Kryeni shumëzimet:
a) $15,43 \cdot 10$; b) $15,43 \cdot 100$; c) $15,43 \cdot 1000$.
- Shprehni:
a) në metra: 23 km; 5,127 km; 0,027 km;
b) në milimetra: 15 cm; 10,5 cm; 0,4 cm;
c) në cm^2 : $0,25 \text{ m}^2$; $0,5 \text{ dm}^2$.
- Kryeni shumëzimet:
a) $35,3 \cdot 4,1$; b) $1,56 \cdot 0,2$; c) $6,36 \cdot 2,5$; d) $2,06 \cdot 3,05$.
- Gjeni vlerën e shprehjeve:
a) $0,4 \cdot 2,55 \cdot 1,6$; b) $(1,34 + 0,9) \cdot 5,4$; c) $40 \cdot (7,85 - 3,9)$.
- Një këmbësore përshkon rrugën midis dy fshatrave, që ndodhen në largësinë 3,5 km, me shpejtësi $4,7 \text{ km/orë}$. Sa km i kanë mbetur për të bërë, pasi ka udhëtuar 0,5 orë?
- Meremetimi i një pjese të rrugës me gjatësi 20 m u krye për tri ditë. Ditën e parë bënë meremetimin e 0,35 të rrugës, kurse ditën e dytë 0,4 të rrugës. Sa m rrugë mbetën për meremetim në ditën e tretë?
- Në tabelën e mëposhtme tregohet përbërja e bukës së bardhë si edhe ajo e bukës integrale (për 100 g të secilës).

Lloji	Ujë	Fibra	Sheqerna të ngadalshme	Sheqerna të shpejta	Proteina	Yndyrna
Bukë e bardhë	30 g	3 g	58,5 g	0,5 g	7 g	1 g
Bukë integrale	35 g	7 g	46,9 g	0,5 g	9 g	1,6 g

Njehsoni, duke shumëzuar çdo vlerë të tabelës me 0,75, sasitë e përbërësve për 75 g bukë. Rezultatet paraqitini në një tabelë.

1.9 Pjesëtimi i numrave dhjetorë

A Kërkoni dhe zbuloni

Një rubinet sjell 0,85 litra ujë në sekondë. Zana ka dy enë me vëllim 50 litra dhe 55,50 litra. Cila nga enët do të mbushet më shpejt?

Po enët me vëllim 100 litra dhe 120 litra për sa kohë do të mbushen?

Sa kohë i duhet Zanës për të mbushur të katra enët?

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Për të pjesëtuar një numër dhjetor me një numër natyror, veprojmë kështu:

1. kryejmë pjesëtimin pa marrë parasysh presjen dhjetore;
2. te herësi vendosim presjen dhjetore, atëherë kur mbaron pjesëtimi i pjesës së plotë;
3. kur pjesa e plotë është më e vogël se pjesëtuesi, atëherë herësi ka zeron si pjesë të plotë.



Punë në grup

Merrni një numër dhjetor. Pjesëtoni numrin me 10, 100, 1000 etj. Përsëritni veprimin me disa numra. Çfarë vini re?

Për të pjesëtuar numrin dhjetor me 10, 100, 1000 etj., veprojmë kështu:

- a) Fillimisht bëjmë që numri dhjetor të ketë para presjes më shumë shifra se sa ka zero pjesëtuesi pas njëshit (duke shtuar tek ai po qe nevoja disa zero para shifrës së parë me vlerë).
- b) Pastaj zhvendosim te numri dhjetor presjen me aq shifra majtas sa zero ka pjesëtuesi pas njëshit



Mbani mend:

Për të pjesëtuar një numër dhjetor me një numër dhjetor, veprojmë kështu:

1. zhvendosim presjen dhjetore tek i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi djathtas, me aq shifra sa ka pjesëtuesi pas presjes dhjetore;
2. kryejmë pjesëtimin me numrin natyror që merret.

Shembull

Zgjidhni ekuacioni $23,5 \cdot x = 298,45$.

Zgjidhje

x është herësi i pjesëtimin të 298,45 me 23,5.

Kryejmë këtë pjesëtim. Mjafton të pjesëtojmë 2984,5 me 235. (Pse?)

Rezultati është $x = 12,7$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Kryeni pjesëtimet:

a) $12,6 : 0,9$;

b) $0,96 : 1,2$;

c) $42,42 : 0,14$.

2. Në një bidon ka 4,5 litra qumësht. Në bidonin e dytë ka 3 herë më pak qumësht, kurse në bidonin e tretë ka dy herë më pak qumësht se në të dytin. Sa litra qumësht ka në secilën bidon?
-  3. Çdo tabletë përmban 0,25 mg ilaç. Sa tableta duhet të marrë në ditë i sëmuri, për të arritur dozën 1 mg?

USHTRIME

1 Kryeni veprimet:

- a) $192,6 : 9$; b) $17,22 : 2$; c) $4,41 : 7$; d) $30,25 : 5$.

2 Kryeni pjesëtimet:

- a) $17,4 : 0,6$; b) $0,343 : 0,7$; c) $8,46 : 1,2$; d) $17,28 : 72$.

3 Syprina e një dhome drejtkëndore është $17,76 \text{ m}^2$. Gjatësia është 4,8 m. Sa është gjerësia e saj?

4 Një copë tel u përthye në fillim në formë trekëndëshi me brinjë 7,5 cm; 8,3 cm dhe 9,4 cm. Më pas, po ky tel u përthye në formë katrori. Sa është brinja e katrorit?

5 Masa e dy copave djathë është 1,4 kg. Njëra është tri herë më e madhe se tjetra. Gjeni masën e copës së madhe.

6 Dihet që $17 : 8 = 2,125$. Duke ditur këtë, gjeni: a) $1,7 : 0,8$; b) $0,17 : 8$; c) $17 : 0,08$.

7 Gjeni vlerën e shprehjeve:

- a) $8,326 : 0,09 \cdot 0,09$; b) $25,41 \cdot 3,8 : 2,541$.

8 Gjeni vlerën e shprehjeve:

- a) $3,5 \cdot (8,68 + 1,136) - 135,531 : 33,3$; b) $(8,94 + 9,39) : (7,57 - 1,4 \cdot 2,05)$;
c) $10,79 : 8,3 - (5 - 0,56) : 3,7$.

9 Kur këmbësori përshkoi 0,35 të rrugës, atij i mbetën edhe 6 km deri te mesi i saj. Sa km e gjatë është rruga?

10 Një dhomë gjumi ka formën e drejtkëndëshit me përmasa 3,5 m dhe 2,5 m. Muret anësore, me lartësi 2,5 m duhen veshur me letër, me përjashtim të derës dhe të dritares, syprina e të cilave së bashku përbën 0,1 të syprinës së mureve. Nëse letra ka formën e një katrori me brinjë 50 cm, sa copë të tilla duhen?

11 Nga një bidon i madh, që përmban 164,5 litra larës enësh, mund të mbushen bidonë të vegjël, që zënë 0,75 litra.

- a) Sa bidonë të vegjël mbushen gjithsej nga i madhi?
b) Në qoftë se janë mbushur 75 bidonë të vegjël, ç'pjesë e sasisë së larësit të enëve ka mbetur në bidonin e madh?



12 Mbretëresha e termiteve (lloj insektesh) është 12 cm e gjatë, ndërsa mbreti i tyre është jo më shumë se 1,7 cm i gjatë. Sa herë më e gjatë (me përafrim deri në njëshe) është mbretëresha e termiteve nga mbreti i tyre.

1.10 Kthimi i thyesës së zakonshme në dhjetore

A Kërkoni dhe zbuloni

Arbrit iu deshën 30 minuta kohë për të bërë detyrat e matematikës, Erës $\frac{1}{2}$ e orës, ndërsa Bardhës 0,5 orë.

Cilit prej tyre iu desh më shumë kohë për të bërë detyrat e matematikës? Argumentoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Numrin dhjetor 3,54 mund ta shkruajmë $\frac{354}{100}$, duke e kthyer në thyesë.



Mbani mend:

Çdo numër dhjetor mund ta kthejmë në thyesë të zakonshme. Por jo çdo thyesë të zakonshme mund ta kthejmë në thyesë dhjetore.

Për shembull, thyesën $\frac{3}{8}$ mund ta shkruajmë si thyesë dhjetore, kurse thyesën $\frac{7}{15}$ nuk mund ta shkruajmë si thyesë dhjetore. Cila është arsyeja?

Për ta kthyer thyesën e zakonshme në dhjetore, emëruesin e saj duhet ta bëjmë 10, 100, 1000, etj. Secili nga numrat 10, 100, 1000 etj., kur zbërthehet në faktorë të thjeshtë, përmban si faktorë të tillë vetëm numrat 2 dhe 5.

Te thyesa $\frac{3}{8}$, emëruesi zbërthehet $2 \cdot 2 \cdot 2$. Po ta shumëzojmë këtë emërues me $5 \cdot 5 \cdot 5$, ai bëhet 1000. Pra, këtë thyesë mund ta shkruajmë si thyesë me emërues 1000.

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{375}{1000} = 0,375.$$



Mbani mend:

Nëse emëruesi i thyesës përmban si faktorë të thjeshtë vetëm 2 dhe 5, këtë thyesë mund ta kthejmë në thyesë dhjetore.

Te thyesa $\frac{7}{15}$, emëruesi zbërthehet $3 \cdot 5$. Me çfarëdo numri ta shumëzojmë këtë emërues, faktori 3 do të jetë gjithnjë i pranishëm. Pra, emëruesin e kësaj thyese nuk e kthejmë dot në një prodhim me vetëm dysha dhe pesa, pra nuk e kthejmë dot në emërues të trajtës 10, 100, 1000. Kjo thyesë nuk kthehet dot në thyesë dhjetore.



Mbani mend:

Nëse emëruesi i një thyese të pathjeshtueshme përmban ndonjë faktor të thjeshtë, të ndryshëm nga 2 dhe 5, atëherë këtë thyesë nuk e kthejmë dot në thyesë dhjetore.



Kujdes!

Deri tani kemi folur për kthim thyesash të pathjeshtueshme në numra dhjetorë. Për thyesat e thjeshtueshme bëjmë më parë të gjitha thjeshtimet e mundshme.

P.sh.: thyesa $\frac{21}{60}$ ka emërues që zbërthehet $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ (përmban faktorin 3). Por ky faktor zhduket gjatë thjeshtimeve. Kemi $\frac{21}{60} = \frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0,35$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Ktheni thyesat në thyesa me emërues të trajtës 10, 100, 1000 dhe shkruajini ato si numra dhjetorë:

a) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{20}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}$. b) $\frac{3}{4}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{11}{20}; \frac{4}{25}; \frac{21}{25}$.

2. Ktheni, nëse është e mundur, thyesat në thyesa dhjetorë:

a) $\frac{19}{400}$; b) $\frac{7}{625}$; c) $\frac{3}{160}$; d) $\frac{53}{750}$.

3. Ktheni numrat dhjetorë në thyesa të zakonshme dhe gjeni vlerën e shprehjeve:

a) $\frac{2}{3} + 0,5$; b) $0,6 - \frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{3} \cdot 0,9$; d) $0,4 \cdot \frac{2}{7}$.



4. Shkruani si numra dhjetorë: $\frac{3}{5}$ cm; $\frac{7}{8}$ g; $\frac{8}{25}$ s.

USHTRIME

1 Plotësoni tabelën:

Thyesë e zakonshme	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
Thyesë dhjetore						

2 Tregoni se cilat thyesa mund t'i kthejmë në thyesa dhjetore dhe cilat jo.

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{10}; \frac{1}{11}; \frac{1}{12}; \frac{1}{13}; \frac{1}{14}; \frac{1}{15}$.

3 Ktheni herësin në thyesë të zakonshme dhe pastaj, nëse është e mundur, në thyesë dhjetore.

a) $15 : 2$; b) $23 : 5$; c) $37 : 25$; d) $9 : 6$.

4 Thjeshtoni thyesat dhe shkruajini si numra dhjetorë:

$\frac{21}{12}; \frac{12}{48}; \frac{11}{44}; \frac{39}{15}; \frac{18}{40}; \frac{24}{75}$.

5 Pa kryer veprimet, çdo shprehje të grupit të parë lidheni me shprehjen e barabartë në grupin e dytë.

i. $\frac{3}{4} - 0,5$; $\frac{1}{4} - 0,2$; $\frac{1}{2} - 0,125$.

ii. $0,5 - \frac{1}{8}$; $0,75 - \frac{1}{2}$; $0,25 - \frac{1}{5}$.

1.11 Numrat dhjetorë periodikë

A Kërkoni dhe zbuloni

Jepen thyesat $\frac{4}{5}; \frac{5}{4}; \frac{3}{8}; \frac{67}{30}; \frac{116}{99}$.

a) Zbërtheni në prodhim faktorësh të thjeshtë emëruesin e secilës prej tyre.

b) Ktheni secilën nga thyesat në numër dhjetor.

Çfarë vini re?

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Mësuam si të pjesëtohet një numër dhjetor me një numër natyror. Kjo mënyrë mund të përdoret edhe për të pjesëtuar një numër natyror me një tjetër numër natyror. Kështu, me anën e pjesëtimit, ne gjejmë numrin dhjetor që është i barabartë me një thyesë të zakonshme, pra kthejmë thyesën e zakonshme në numër dhjetor.

Shembulli 1

Të kthehet thyesa $\frac{7}{4}$ në numër dhjetor.

Zgjidhje

Thyesa $\frac{7}{4}$ është herësi i pjesëtimit të 7 me 4. Kryejmë këtë pjesëtim. Gjejmë $\frac{7}{4} = 1,75$.

Duke u përpjekur të paraqesim si numra dhjetorë thyesat $\frac{140}{3}; \frac{4}{9}; \dots$, vëmë re se procesi i pjesëtimit nuk merr fund dhe përftohen disa numra që kanë një numër të pafundëm shifrash pas presjes dhjetore: 46,666...; 0,444...; 2,2333...; 1,171717....

Këta janë **numra dhjetorë të pafundmë**.

Në këta numra, pas presjes, gjithmonë një shifër ose një grup shifrash përsëritet vazhdimisht.

Shembulli 2

$$\frac{140}{3} = 46,666... \text{ (përsëritet shifra 6); } \quad \frac{4}{9} = 0,444... \text{ (përsëritet shifra 4);}$$

$$\frac{67}{30} = 2,2333... \text{ (përsëritet shifra 3); } \quad \frac{116}{99} = 1,171717... \text{ (përsëritet grupi i shifrave 17).}$$



Mbani mend:

Shifra ose grupi i shifrave që përsëriten vazhdimisht quhet **periodë**.

Vetë numrat quhen **numra dhjetorë të pafundmë periodikë**.

Nëse te thyesa e zakonshme kryejmë pjesëtimin e numëruesit me emëruesin, do të marrim një numër dhjetor të fundmë ose një numër dhjetor të pafundmë periodik.

Anasjellas, çdo numër dhjetor i fundmë mund të kthehet në thyesë të zakonshme.

Më tej, do të vërtetojmë se edhe çdo numër dhjetor i pafundmë periodik, mund të kthehet në thyesë të zakonshme, d.m.th. në thyesë të trajtës $\frac{m}{n}$, ku m, n janë numra natyrorë.

Për shembull, $0,333... = \frac{3}{9}$; $0,414141... = \frac{41}{99}$ etj.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Ktheni në trajtë dhjetore numrat, duke treguar periodën, sipas rastit:

$$\frac{5}{9}, \frac{71}{33}, \frac{47}{30}, \frac{1}{11}, \frac{29}{74}.$$

2. Shkruani:

- a) katër thyesa që paraqiten si numra dhjetorë të fundmë;
b) katër thyesa që paraqiten si numra dhjetorë të pafundmë.

3. Shqyrtoni numrin dhjetor të pafundmë: 2,101001000...

- a) Tregoni mënyrën e ndërtimit të tij. A është ky një numër dhjetor periodik?
b) A mund të kthehet ky numër në trajtën thyesore $\frac{m}{n}$?

4. Vizatoni një katror. Ngjyrosni – e tij, pastaj $\frac{1}{10}$ e gjysmës tjetër, pastaj $\frac{1}{100}$ e kësaj gjysme, pastaj $\frac{1}{1000}$ e kësaj gjysme e kështu pambarim.

- a) Ç'pjesë e katrorit është ngjyrosur?
b) Tregoni që, në të vërtetë, është ngjyrosur $\frac{5}{9}$ e katrorit.

USHTRIME

- 1 Paraqitni si numra dhjetorë:

$$\frac{11}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{8}, \frac{4}{25}, \frac{8}{3}, \frac{3}{7}.$$

- 2 Shkruani tri thyesa që kthehen në numër dhjetor të fundmë; tri thyesa që kthehen në numra dhjetorë periodikë.

- 3 Paraqitni si thyesa:

$$0,4; \quad 1,56; \quad 3,081; \quad 9,15; \quad 16,79.$$

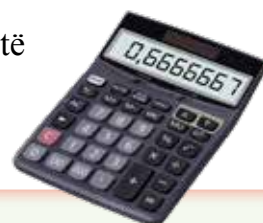
- 4 Një katror e ka syprinën 1 m^2 . Presim $\frac{9}{10}$ e tij, pastaj $\frac{9}{10}$ e pjesës së mbetur, pastaj $\frac{9}{10}$ e pjesës së mbetur e kështu pa mbarim. A mund të tregoni, me anë të një thyese, se ç'pjesë e katrorit veçohet kështu?

- 5 Zgjidhni ekuacionet, duke e paraqitur zgjidhjen si numër dhjetor (të fundmë apo të pafundmë periodik):

$$\text{a) } 0,4x + \frac{2}{10}x = 8,2; \quad \text{b) } y - 0,12y = 5; \quad \text{c) } \frac{1}{2}x - 0,35x = \frac{1}{4}; \quad \text{d) } u - \frac{1}{4}u = 0,5.$$

- 6 Mira kryen veprimin $12 : 18$ në kalkulator dhe rezultati që merr është 0,6666667.

- a) Cila është thyesa e njëvlershme me të?
b) Si është kryer veprimi nga kalkulatori?



1.12 Përqindja

A Kërkoni dhe zbuloni

Një pajisje elektrike kushton 25 euro. Çmimi i saj ulet për 20%. Gjeni:

- për sa euro është ulur çmimi;
- çmimin e ri të pajisjes elektrike.

Nëse Agimi merr dy pajisje të tilla, do t'i blejë me 6 euro më pak secilën.

- Gjeni sa % do të ulet çmimi.

B Vrojtoni dhe mësoni

Thyesa $\frac{1}{100}$ lexohet “një për qind” dhe shënohet “1%”.



Mbani mend:

Të gjitha thyesat me emërues 100 lexohen si përqindje.

P.sh.: $\frac{35}{100}$ shënohet 35% dhe lexohet “35 për qind”.

Një për qind e një madhësie të caktuar quhet $\frac{1}{100}$ pjesë e saj.

Për të gjetur 1% të një madhësie, mjafton të shumëzojmë atë me $\frac{1}{100}$ (ose ta pjesëtojmë atë me 100). Madhësia së cilës i llogaritet përqindja (tërësia) përbën 100 për qind të vetes (100%).

Për të gjetur $a\%$ të një madhësie të caktuar, veprojmë njësoj si për gjetjen e pjesës kur njihet tërësia. Për këtë mjafton të shumëzojmë madhësinë e shqyrtuar me thyesën $\frac{a}{100}$.

Për të gjetur një madhësi, kur dimë që $b\%$ e saj është numër i njohur p (për të gjetur tërësinë kur dihet pjesa), mjafton të pjesëtojmë p me thyesën $\frac{b}{100}$.

Shembulli 1

Nga 50 000 banorë të një qyteti, që kanë të drejtë vote, votuan 60% e tyre. Sa banorë votuan?

Zgjidhje

Numri i votuesve është $50\,000 \cdot \frac{60}{100} = 30\,000$ banorë.

Shembulli 2

Në një shkollë mësojnë 110 djem, që përbëjnë 55% të numrit të përgjithshëm të nxënësve. Sa nxënës ka shkolla?

Zgjidhje

Numri i nxënësve është $110 : \frac{55}{100} = 110 \cdot \frac{100}{55} = 200$ nxënës.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Shkruani si përqindje: $\frac{3}{4}$; 0,48; 0,09.
 - Shkruani si numra dhjetorë: 24%; 160%; 0,2%.
- Nga një shumë prej 50 eurosh, u harxhuan 75% për të blerë ushqime. Sa euro mbetën?
- Gjeni:
 - 24% të numrit 60;
 - 45% të numrit 700.
- Gjeni numrin, nëse 30% e tij është 120.
-  Fëmija i porsalindur peshonte 3 kg. Pas një viti, ai peshon 200% më tepër. Sa është pesha e fëmijës pas një viti?

USHTRIME

- Shkruani si thyesa dhe si numra dhjetorë: 17%; 73%; 3%; 180%; 210%.
- Shkruani si përqindje:
 - 0,05; 0,7; 0,65; 1,22; 2,45.
 - 0,175; 2,345; 1,015.
- Shkruani si përqindje:
 - $\frac{3}{5} = \dots$;
 - $\frac{11}{4} = \dots$;
 - $\frac{5}{2} = \dots$;
 - $\frac{9}{10} = \dots$
- Gjeni:
 - 12% të numrit 85;
 - 27% të numrit 450.
- Gjeni numrin nëse:
 - 25% e tij është 160;
 - 35% e tij është 280.
- Bileta e autobusit që lidh dy qytete kushton 2,5 euro. Me rritjen e çmimit të karburanteve, çmimi i saj u rrit 20%. Sa kushton tani bileta?
- Një palë sandale kushtojnë 24 euro. Në dimër ato kushtojnë 33% më pak. Sa kushtojnë sandalet në dimër?
- Në dyqan, në mbarim të ditës, mbetën 50 kg perime, që përbëjnë 10% të sasisë fillestare të tyre. Sa kg perime ishin në fillim?
- Pasi mbolli 40% të kopshtit, fermeri vuri re se i kishin mbetur pa mbjellë 300 m². Sa m² ishte syprina e kopshtit?
-  Fusha e Kosovës përfshin një sipërfaqe prej 1659 km², ose 15,2% të territorit të Kosovës. Gjeni sipërfaqen e territorit të Kosovës.

-  Tabela e mëposhtme jep gjatësitë e disa lumenjve që përshkojnë Kosovën.

Lumi	Drini i Bardhë	Ibër	Drenicë	Llapi
Gjatësia	122 km	82 km	50 km	40 km

Gjeni sa % të gjatësisë së lumit Drini i Bardhë janë lumenjtë e tjerë.

1.13 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

<i>Tashmë kemi mësuar</i>	<i>Provoni të zgjidhni</i>
Vetinë themelore të thyesave dhe thjeshtimin e tyre, duke pjesëtuar numërues dhe emërues me të njëjtin numër.	1. Thjeshtoni thyesat: $\frac{6}{10}, \frac{12}{15}, \frac{40}{50}, \frac{14}{56}, \frac{18}{90}, \frac{36}{60}.$ 2. Thjeshtoni thyesat duke pjesëtuar numërues dhe emërues me PMP e tyre. $\frac{22}{66}, \frac{24}{360}, \frac{100}{250}.$
Kthimin e numrave thyesorë në thyesa me emërues të njëjtë dhe krahasimin e tyre.	3. Shkruani gjithë thyesat me emërues 5, që janë më të mëdha se $\frac{1}{5}$ dhe më të vogla se $\frac{12}{10}$. 4. Një dërrasë tremetërshe e ndanë në 7 pjesë të barabarta, kurse një dërrasë katërmetërshe e ndanë në 10 pjesë të barabarta. Cilat pjesë janë më të gjata?
Mbledhjen dhe zbritjen e numrave thyesorë, duke i kthyer në thyesa me emërues të njëjtë.	5. Gjeni shumën dhe ndryshimin: $\frac{2}{5} + \frac{11}{15} = \dots; \quad \frac{7}{12} - \frac{2}{21} = \dots$ 6. Gjeni vlerën e shprehjes: $\frac{3}{7} + \frac{11}{14} - \frac{2}{21} = \dots$
Shumëzimin dhe pjesëtimin e numrave thyesorë.	7. Kryeni veprimet: a) $\frac{4}{5} : \frac{4}{7}$; b) $\frac{3}{16} : \frac{5}{12}$; c) $\frac{3}{5} : \frac{9}{25}$; d) $5 : \frac{2}{5}$; e) $1 : \frac{1}{2}$; f) $0 : \frac{7}{8}$. 8. Me çfarë shpejtësie duhet të lëvizë një mjet, që të përshkojë 15 km për $\frac{5}{6}$ orë?
Gjetjen e pjesës dhe të tërësisë.	9. Gjeni $\frac{3}{5}$ e 12 eurove. 10. Masa e peshkut të thatë përbën $\frac{55}{100}$ e masës së peshkut të freskët. Sa peshk i freskët duhet për të marrë 231 kg peshk të thatë?

Rrumbullakimin, mbledhjen dhe zbritjen e numrave dhjetorë.	11. Rrumbullakoni numrin 7,6147: a) në njësinë më të afërt; b) në të dhjetën më të afërt; c) në të qindtën më të afërt. 12. Një brinjë e trekëndëshit është 11,5 cm. Ajo është 0,6 cm më e vogël se brinja e dytë dhe 0,9 cm më e madhe se brinja e tretë. Gjeni perimetrin e trekëndëshit.
Shumëzimin dhe pjesëtimin e numrave dhjetorë.	13. Gjeni: a) $0,08 \cdot 1,25 = \dots$; b) $1,3 \cdot 12,5 = \dots$ 14. Kryeni veprimet: a) $512 : 0,16 = \dots$; b) $81,2 : 0,35 = \dots$
Kthimin e numrave thyesorë në numra dhjetorë.	15. Shkruani si numra dhjetorë thyesat: $\frac{2}{5}; -; \frac{4}{25}; \frac{100}{11}.$
Zgjidhjen e situatave problemore, duke përdorur kuptimin e përqindjes.	16. 30% e kopshtit, që përbën një tokë me syprinë 600 m², u mboll me perime. Sa m² është pjesa tjetër e kopshtit? 17. Në maratonën e qytetit, vjet morën pjesë 200 persona. Këtë vit, numri i pjesëmarrësve u rrit me 120%. Sa pjesëmarrës ishin sivjet? 18. Pasi bëri disa blerje, Leka pa se i kishin mbetur 15 euro, që përbëjnë 30% të sasisë fillestare të parave. Sa euro kishte ai në fillim? 19. Në kampionatin e shahut morën pjesë 24 nxënës të klasave të shtata, që përbënin 40% të nxënësve. Gjeni sa nxënës kanë klasat e shtata. 20. Në ditën e parë, Mira lexoi 35% të faqeve të një libri, ditën e dytë 30% të faqeve të mbetura dhe pjesën tjetër, ditën e tretë. Nëse libri ka 200 faqe, gjeni sa faqe lexoi Mira për çdo ditë.

1.14 Vlerësim**Koha: 45 minuta****1** Njihsoni:

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$; b) $\frac{7}{8} - \frac{1}{6}$; c) $47,5 + 1,625$; d) $75,32 - 21,4$.

(4 pikë)**2** Njihsoni:

a) $\frac{4}{25} \cdot \frac{15}{12}$; b) $\frac{12}{18} : \frac{24}{20}$; c) $41,4 \cdot 5,6$; d) $0,8 \cdot \frac{20}{3}$.

(4 pikë)**3** Shkruani si përqindje: $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{8}{125}$.**(3 pikë)****4** Shkruani si numra dhjetorë: $\frac{7}{3}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{12}{5}$.**(3 pikë)****5** Njihsoni vlerën e shprehjeve:

a) $\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right) =$

(2 pikë)

b) $(0,4 - 0,32) : (0,08 \cdot 4,5) =$

(2 pikë)**6** Kryeni veprimet:

a) $6,25 : 1,5$;

b) $14,4 : 0,12$;

c) $1,681 : 0,41$;

d) $12 : 0,4$.

(4 pikë)**7** Nëse me 3,60 euro blihet 30% e 1 kg arra, sa kushton 1 kg arra?**(2 pikë)****8** Në një sallë teatri me 500 vende janë të zëna 60% e tyre. Sa vende janë bosh?**(2 pikë)****9** Zgjidhni ekuacionin $\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}\right) \cdot 15 = 8$.**(2 pikë)****10** Nga një depo, ditën e parë u nxor 40% e patateve, ditën e dytë u nxor 60% e sasisë së mbetur të patateve. Ditën e tretë u nxorën 72 tonë patate, duke e boshatisur krejtësisht depun. Sa tonë patate kishte në depo?**(3 pikë)****11** Sipërfaqja territoriale e Prizrenit është 640 km², ose 5,88% e sipërfaqes territoriale të Kosovës. Gjeni sipërfaqen e Kosovës.**(2 pikë)**

2

GJEOMETRIA NË RRAFSH (1)

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- konstrukton këndin kongruent me këndin e dhënë;
- konstrukton simetralen e këndit dhe të segmentit të dhënë;
- përdor njësitë për matjen e këndit (shkalla, minuta dhe sekonda) dhe i kthen ato prej një njësie në tjetrën;
- mbledh dhe zbret këndet e dhëna në mënyrë konstruktive dhe aritmetike;
- konstrukton këndet 60° , 30° , 15° , 90° , 45° , 120° etj., duke shfrytëzuar metoda të ndryshme (për shembull: fletët palosëse, këndmatësin, vizoren dhe kompasin);
- cakton këndin komplementar dhe suplementar të këndit të dhënë, me njehsim dhe me konstruktim;
- përshkruan vetitë e këndeve që formohen, kur drejtëzat paralele priten nga transversalja dhe i emërton ato.



Fjalë kyçe:

kënd, llojet e këndit, kënde komplementare, suplementare, masa e këndit, shkalla, minuta, sekonda këndore, simetralja e këndit, simetralja e segmentit, drejtëzat paralele, kënde shndërruese, kënde përgjegjëse.

A E DINI SE...?



Ngado që të hidhni shikimin, do të shihni kënde dhe figura gjeometrike. Në klasën tuaj mund të ketë një tabelë në formë drejtkëndore; akrepat e orës formojnë kënde të ndryshme. Arkitektët/et janë profesionistët që përdorin shpesh kënde për të projektuar ndërtesa në forma të ndryshme. Projektuesit/et e rrugëve llogarisin shpesh këndet e pjerrësisë së rrugës, ndërsa pilotët llogarisin këndin me të cilin do të ulet ose do të ngrihet avioni.

Astronautët/et llogarisin këndin nën të cilin do të ngrihet anija kozmike për të arritur në pikën e caktuar. Vijat e bardha në rrugë janë shembull i drejtëzave paralele.

Vrojtoni me kujdes mjedisin rrethues. Do të gjeni figura gjeometrike.



2.1 Përsëritje. Këndet dhe matja e tyre

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Kujtoni llojet e këndeve që keni mësuar.

Kërkoni shokut/shoqes të konstruktojë një kënd të shtrirë, të drejtë, të ngushtë, të gjerë. Emërtoni dhe lexoni këndet e konstruktura.

Diskutoni ç'loje të tjera këndesh keni mësuar.

B Vrojtuni dhe mësoni



Mbani mend:

Kënd quhet figura gjeometrike e formuar nga bashkimi (unioni) i dy gjysmëdrejtëzave që kanë të njëjtën origjinë. Gjysmëdrejtëzat që formojnë këndin quhen krahë, kurse origjina e tyre quhet kulm i këndit.

Për të shënuar këndet mund të përdorim tri shkronja, duke vënë në mes shkronjën që tregon kulmin. Këndi në figurën 2.1 shënohet $\angle BAC$ ose $\angle CAB$. Megjithatë, mund të përdoret vetëm një shkronjë, kulmi i tij: $\angle A$.

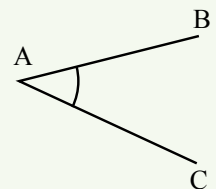


Fig. 2.1

Këndet që kanë kulmin e përbashkët, një krah të përbashkët dhe dy krahë të tjera në anë të ndryshme të këtij, quhen kënde **fqinje**.

Dy kënde fqinje, që krahët e tjerë i kanë gjysmëdrejtëza plotësuese, quhen **të përbrinjëshëm**.

Dy kënde të tilla, që krahët e njërit janë gjysmëdrejtëza plotësuese të krahëve të tjetrit, quhen kënde **kryqëzuese**.

Këndi quhet **i shtrirë** nëse krahët e tij janë gjysmëdrejtëza plotësuese të njëra-tjetres.

Këndet krahasohen nëpërmjet vendosjes së njërit mbi tjetrin (mbivendosjes). Nëse dy kënde përputhen gjatë mbivendosjes së njërit mbi tjetrin, ata janë kongruentë.

Këndi që është i barabartë me të përbrinjëshin e vet, quhet kënd **i drejtë**. Këndi i drejtë është sa gjysma e këndit të shtrirë (fig. 2.2). Tashmë dimë si të ndërtojmë një kënd të drejtë, duke përdorur trekëndëshin e vizatimit.

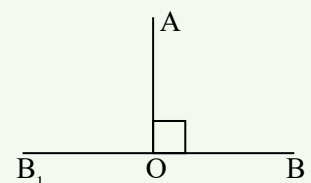


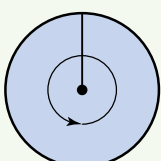
Fig. 2.2



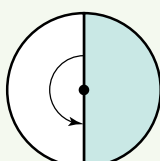
Mbani mend:

Nëse shuma e dy këndeve është kënd i drejtë, ato janë kënde plotësuese (komplementare). Nëse shuma e dy këndeve është kënd i shtrirë, ato janë kënde shtuese (suplementare).

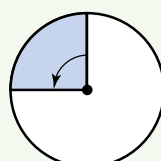
Këndet mund t'i klasifikojmë sipas masës së rrotullimit.



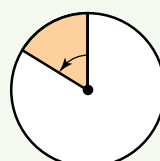
Rrotullim i plotë
Këndi i plotë



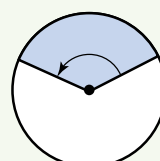
Gjysmërrrotullimi
Këndi i shtrirë



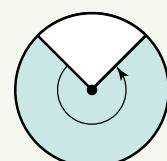
Çerek rrotullimi
Këndi i drejtë



Më i vogël se çerek rrotullimi
Këndi i ngushtë



Këndi i gjerë



Këndi reflektiv

Fig. 2.3

C Ushtroni duke zbatuar

1. Njesoni këndin plotësues me këndin që e ka masën:
a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 10° .
2. Janë dhënë tri kënde të drejta. I pari me të dytin kanë një pjesë të përbashkët, të barabartë me 45° , kurse i dyti me të tretin kanë një pjesë të përbashkët, të barabartë me 60° . A kanë pjesë të përbashkët këndi i parë me këndin e tretë dhe, në rast se po, sa është masa e tij?
3. Grisni njërin kënd në një fletë të fletores sipas figurës 2.4.
Përdorni këtë fletë ose vizoren kënddrejtë për të gjetur këndet e drejta në figurat më poshtë.

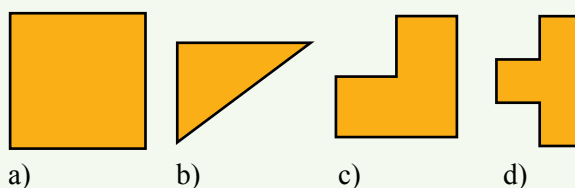


Fig. 2.5

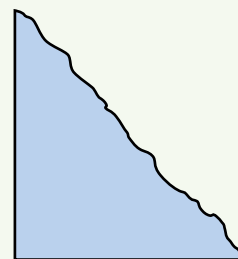


Fig. 2.4

USHTRIME

- 1 Shihni secilin prej çifteve të gjysmëdrejtëzave të mëposhtme. A formojnë ato një kënd? Arsyetoni.

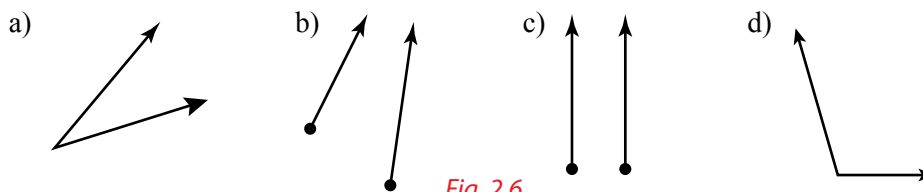


Fig. 2.6

- 2 Emërtoni gjysmëdrejtëzat dhe këndet e shënuara në figurën e mëposhtme.

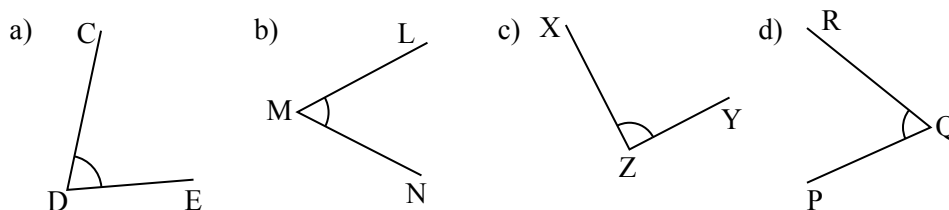


Fig. 2.7

- 3 Vizatoni figura që kanë:
a) dy kënde të drejta; b) tri kënde të drejta; c) katër kënde të drejta; d) pesë kënde të drejta.
- 4 Me anë të trekëndëshit të vizatimit, konstruktoni dy drejtëza prerëse, që formojnë një kënd të drejtë.
a) Sa kënde të shtrira ka në figurë? b) Sa kënde të drejta ka në figurë?
- 5 Është dhënë këndi $\angle AOB$. Konstruktoni një gjysmëdrejtëz me origjinë në pikën O, në mënyrë që në figurë të shfaqet: a) një kënd i shtrirë; b) një kënd i drejtë.
Në sa mënyra mund ta bëni këtë?
- 6 Vizatoni dy kënde me të njëjtin kulm që:
a) nuk janë fqinje; b) janë fqinje, por jo të përbrinjëshme;
c) janë të përbrinjëshme; d) janë kryqëzuese;
e) janë suplementare; f) janë komplementare.

2.2 Matja e këndeve

A Kërkoni dhe zbuloni

Përdorni vetëm vizore dhe laps për të konstruktuar këndet që mendoni se kanë masën: 10° ; 30° ; 60° ; 80° ; 105° ; 280° .

Tani matni me këndmatës këndet që konstruktuat. A i jeni afruar masës së kërkuar? A mund të matni me këndmatës këndin $24^\circ 24'$? Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Këndet mund t'i krahasojmë jo vetëm me mbivendosje, por edhe duke i matur.

Për të gjetur masën e një këndi të dhënë, duhet gjetur se sa herë përmbahet në të njësia.

Njësia kryesore për matjen e këndeve është *shkalla këndore*. Duke e ndarë këndin e shtrirë në 180 pjesë të barabarta, marrim këndin 1° . Nënfishat e shkallës janë minutat dhe sekondat këndore:

$1^\circ = 60' = 3600''$. Po kështu kemi: $1' = 60'' = \frac{1}{60}$ pjesë e shkallës; $1'' = \frac{1}{3600}$ pjesë e shkallës.



Mbani mend:

- Masa e këndit është numër jonegativ.
- Këndet kongruente kanë masa të barabarta.
- Këndet që i kanë masat të barabarta janë kongruente.
- Nëse një kënd ndahet në dy pjesë (me anë të një gjysmëdrejtëze që del nga kulmi i tij), atëherë masa e këndit është e barabartë me shumën e masave të këtyre pjesëve.
- Dy kënde shtuese (suplementare) e kanë shumën e masave 180° .
- Dy kënde plotësuese (komplementare) e kanë shumën e masave 90° .

Masa e një këndi gjendet duke përdorur këndmatësin.



Punë në grup

Me ndihmën e këndmatësit matni masën e këndeve në figurat e mëposhtme. Shpjegoni si vendoset dhe si lexohet këndmatësi në të dyja rastet.

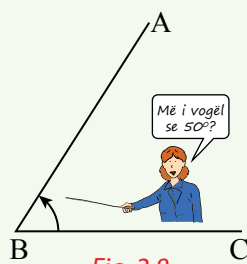


Fig. 2.8

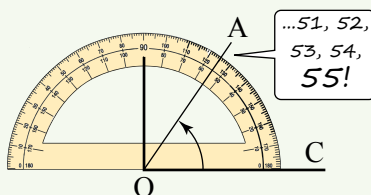


Fig. 2.9

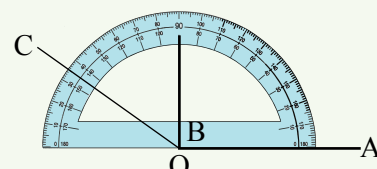


Fig. 2.10

Këndi që tregohet në figurën 2.11 është më i madh se 180° , por më i vogël se 360° , quhet **kënd i hapur (refleksiv)**.

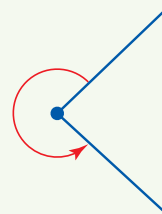


Fig. 2.11

Kënde të tilla nuk mund të maten me këndmatës. Megjithatë, këndi përkatës më i vogël mund të matet me këndmatës (fig. 2.12). Të dyja këndet formojnë një kënd të plotë, pra 360° . Këndi i madh është: $360^\circ - 37^\circ = 323^\circ$.

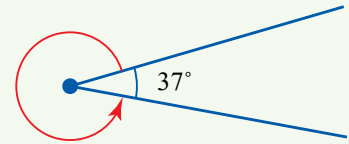


Fig. 2.12

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni masën e këndeve të paraqitura në figurën 2.13, duke përdorur këndmatësin. A ka midis tyre kënde kongruente?
2. Aeroplani u ngrit nga pista në një kënd $45^\circ 30' 20''$. Gjeni masën e këndit në sekonda këndore.

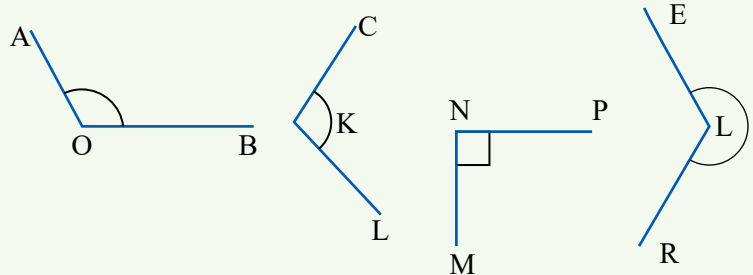


Fig. 2.13

USHTRIME

1. Gjeni këndin shtues (suplementar) të këndit, që e ka masën:
a) $90^\circ 46'$; b) 45° ; c) $60^\circ 30' 40''$; d) 135° ; e) $150^\circ 5'$.
2. Gjeni këndin plotësues (komplementar) të këndit me masë:
a) $50^\circ 16'$; b) 55° ; c) $45^\circ 20' 40''$; d) 35° ; e) $15^\circ 52' 30''$.
3. Në figurën 2.14, gjeni masat e këndeve dhe plotësoni barazimet:
a) $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = \dots$; b) $m(\angle AOC) + m(\angle COA_1) = \dots$;
c) $m(\angle BOC) + m(\angle COD) = \dots$; d) $m(\angle AOB) = \dots$;
4. Gjeni me përafërsi masën e këndeve në figurën 2.15. Më pas, kryeni matjet përkatëse.

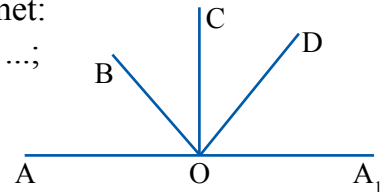


Fig. 2.14

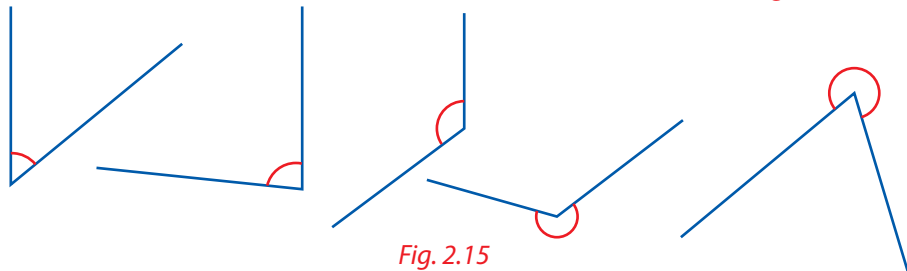


Fig. 2.15

5. Tregoni sa minuta dhe sa sekonda këndore ka:
a) $60^\circ = \dots' = \dots''$ b) $45^\circ = \dots' = \dots''$
6. Plotësoni barazimet:
a) $300' = \dots^\circ \dots'$
b) $4000'' = \dots^\circ \dots' \dots''$
7. Matni me këndmatës këndet në figurat në anë.
a) Shqyrtoni këndet a° , b° dhe c° . E dini se sa duhet të dalë shuma e tyre? Kur i mbledhni, sa ju del shuma?
b) Shqyrtoni këndet d° , h° dhe f° . E dini se sa duhet të dalë shuma e tyre? Kur i mbledhni, sa ju del shuma?
c) Shqyrtoni këndet i° dhe f° . Çfarë vini re?

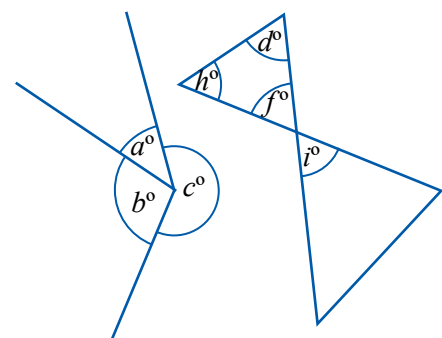


Fig. 2.16

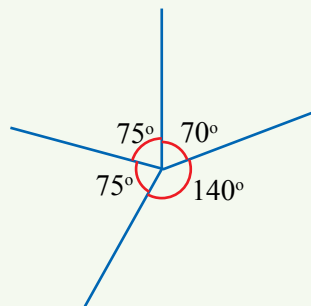
2.3 Gjetja e masës së këndeve që mungojnë

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 2.17, tregohen kënde të barabarta. Si mund ta gjejmë masën e këndeve të dhëna pa kryer matje? Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Katër këndet në figurën 2.18 kanë një kulm të përbashkët. Shuma e tyre është një kënd i plotë (360°).



$$75^\circ + 75^\circ + 70^\circ + 140^\circ = 360^\circ$$

Fig. 2.18

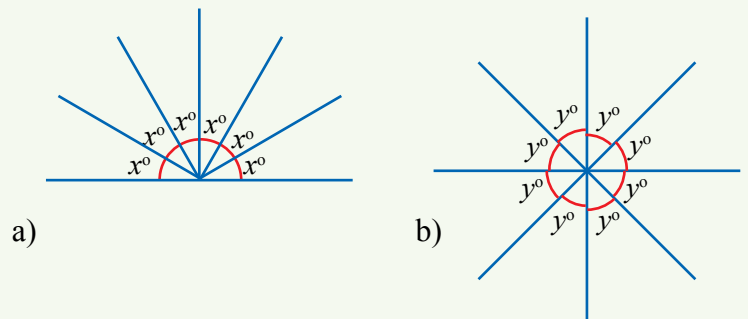
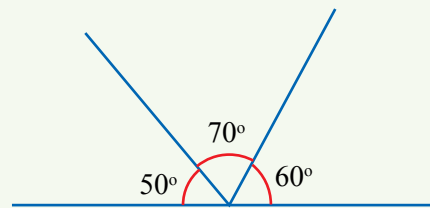


Fig. 2.17



$$50^\circ + 70^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

Fig. 2.19

Tri këndet e njëpasnjëshme në figurën 2.19 plotësojnë së bashku një kënd të shtrirë. Shuma e masave të tyre është 180° .

Shembull

Gjeni masën e këndit a° .

Zgjidhje

Shuma e masave të tri këndeve është 360° . Njëri nga këndet është i drejtë. Masa e tij nuk është shënuar, por është paraqitur simboli që përdorim gjithmonë për të treguar këndin e drejtë.

$$90^\circ + 130^\circ = 220^\circ$$

$$360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

$$m(\angle a) = 140^\circ$$

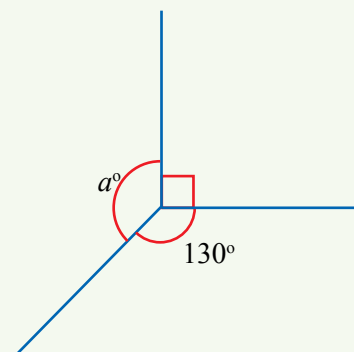


Fig. 2.20

Këndet në figurën 2.21 kanë një kulm të përbashkët dhe krahët gjysmëdrejtëza plotësuese të njëra-tjetrës. Këto kënde janë **kënde kryqëzuese (të kundërta në kulm)**. Dy drejtëza prerëse caktojnë dy çifte këndesh kryqëzuese.

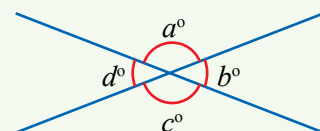


Fig. 2.21

**Mbani mend:**

Këndet kryqëzuese kanë masa të barabarta.

Në figurën 2.21 duket qartë se këndet $\angle a$ dhe $\angle c$ janë kryqëzues.

Kemi $m(\angle a) + m(\angle d) = 180^\circ$, sepse këndi $\angle a$ dhe $\angle d$ formojnë një kënd të shtrirë.

Prej këtui del $m(\angle a) = 180^\circ - m(\angle d)$.

Po kështu $m(\angle c) + m(\angle d) = 180^\circ$, sepse këndi $\angle c$ dhe $\angle d$ formojnë një kënd të shtrirë.

Prej këtui del $m(\angle c) = 180^\circ - m(\angle d)$.

Pra, këndët $\angle a$ dhe $\angle c$ kanë masë të barabartë me $180^\circ - m(\angle d)$.

Kështu $\angle a = \angle c$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Për secilin rast në figurën 2.22, gjeni masën e këndeve që mungojnë.

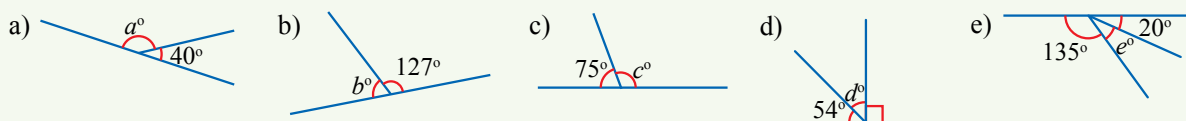


Fig. 2.22



2. Këndi i hedhjes së një parashutisti nga aeroplani ishte $3860''$. Sa shkallë, minuta dhe sekonda është këndi i hedhjes së parashutistit.

USHTRIME

1 Për secilin rast në figurën 2.23, gjeni masën e këndeve që mungojnë.

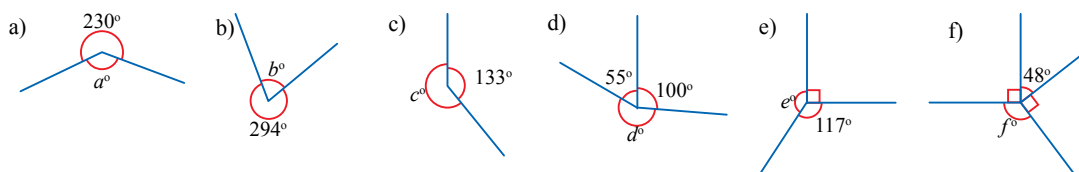


Fig. 2.23

2 Për secilin rast në figurën 2.24, gjeni masën e këndeve që mungojnë.

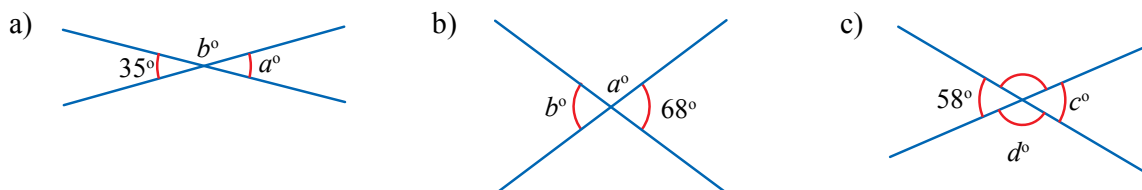


Fig. 2.24

3 Drejtëzat (AB) dhe (CD) priten në pikën U (fig. 2.25). Masa e këndit $\angle AUD$ është 83° .

a) Gjeni masën e këndit $\angle CUB$. b) Gjeni masën e këndit $\angle BUD$.

4 Shuma e masave të dy këndeve është 90° (kënde komplementare).

Gjeni masat e tyre, nëse:

a) ato janë të barabarta;

b) masa e njërit është $10^\circ 30' 20''$ më e madhe se masa e tjetrit;

c) masa e njërit është sa gjysma e masës së tjetrit;

d) masa e njërit është sa $\frac{4}{5}$ e masës së tjetrit.

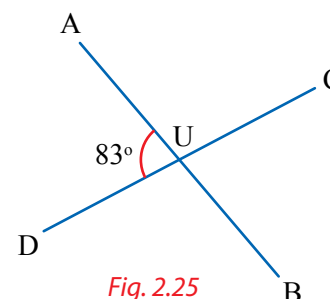


Fig. 2.25

2.4 Konstruktime me këndmatës, kompas dhe vizore

A Kërkoni dhe zbuloni

Me anë të këndmatësit konstruktioni këndin me masë 40° , krah i të cilit është rrezja [OM). Sa të tillë mund të konstruktioni?

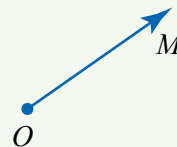


Fig. 2.26

B Vrojtoni dhe mësoni

Me këndmatës

Shembulli 1

Është dhënë këndi $\angle MPN$. Me anë të këndmatësit konstruktioni një kënd kongruent me të.

Zgjidhje

Gjejmë me anë të këndmatësit masën e këndit $\angle MPN$. Ajo është 65° .

Marrim një gjysmëdrejtëz [OA) dhe ndërtojmë, me anë të këndmatësit, këndin me masë 65° , që ka [OA) si krah (ka 2 të tilla). Kemi konstruktuar këndin e kërkuar, sepse këndet me masa të barabarta janë kongruente.

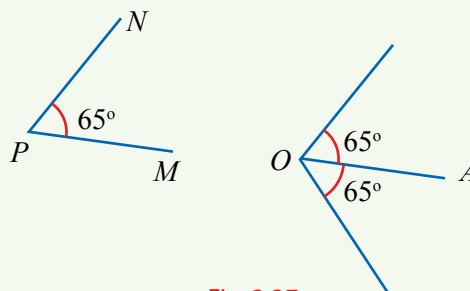


Fig. 2.27

Shembulli 2

Konstruktioni me saktësi këndin 235° .

Zgjidhje

Në fillim, këndin 235° ndajeni në dy kënde: në një kënd të shtrirë dhe në tjetrin që mbetet. $235^\circ = 180^\circ + 55^\circ$. Këndi 180° konstruktohet lehtë. Në një drejtëz, shënoni një pikë në mënyrë që të poziciononi këndmatësin. Shtoni këndin 55° . Shënoni një pikë në këndin 55° .

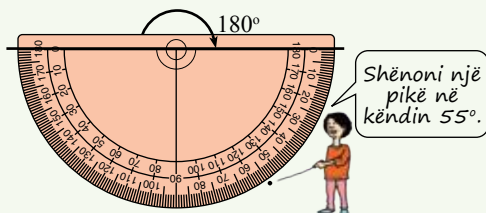


Fig. 2.28

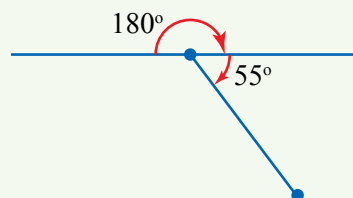


Fig. 2.29

Lëvizni këndmatësin dhe bashkoni të dyja pikat. Të dyja këndet formojnë këndin 235° .

Me kompas dhe vizore

Shembulli 3

Është dhënë këndi $\angle XOY$. Të konstruktohet vetëm me kompas e vizore (pa këndmatës) një kënd kongruent me të.

Zgjidhje

1. Konstruktojmë, me anë të kompasit, një rreth me qendër O dhe me rreze të çfarëdoshme; ai i pret krahët e këndit $\angle XOY$ në pikat A, B. (a)
2. Marrim një gjysmëdrejtëz. Me hapjen e mëparshme të kompasit, ndërtojmë një hark rrethi me qendër C (ka të njëjtën rreze me rrethin e mëparshëm); ky e pret gjysmëdrejtëzën [CM) në pikën D. (b)
3. Vendosim kompasin në pikën A dhe e hapim sa largesa (korda) AB.
4. Me këtë hapje të kompasit, ndërtojmë një hark rrethi me qendër D. Ky e pret harkun e mëparshëm në dy pika, E dhe F. (c)
5. Ndërtojmë gjysmëdrejtëzën [CF). Secili nga këndet $\angle DCF$, $\angle DCF$, është kongruent me këndin e dhënë $\angle XOY$. (d)

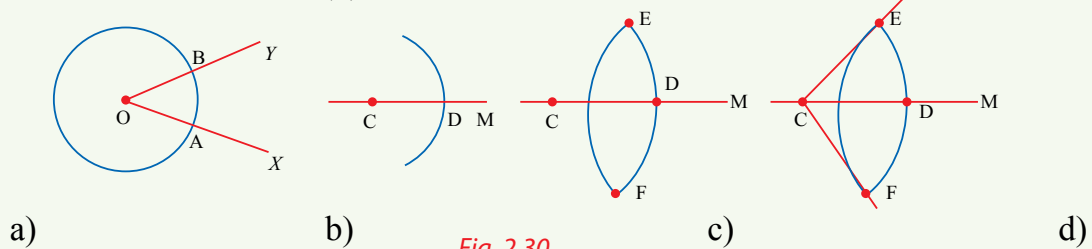


Fig. 2.30

**Punë në grup**

Vizatoni një kënd. Konstruktoni simetralen e këndit:
a) me këndmatës dhe vizore; b) me kompas dhe vizore.
Tregoni si vepruat.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Në figurën 2.31 është dhënë këndi $\angle PRS$. Konstruktoni këndin kongruent me të, duke përdorur vetëm kompasin dhe vizoren.
2. Në figurën 2.32 është dhënë këndi $\angle AOB$.
a) Tregoni sa është masa e tij.
b) Me anë të këndmatësit konstruktoni këndin $\angle AOC$ me masë sa gjysma e $\angle AOB$. Cila është simetralja e këndit $\angle AOB$?

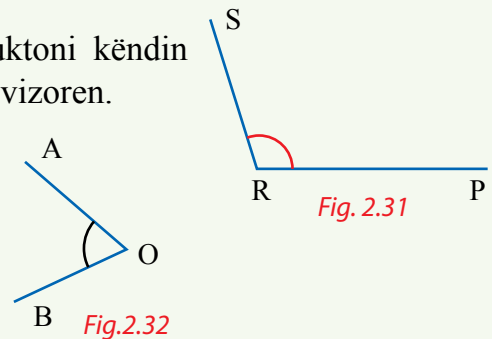


Fig. 2.31

Fig. 2.32



3. Përcaktoni afërsisht mesin e fletës suaj të punës. Konstruktoni me këndmatës simetralen e këndit që formohet duke bashkuar këtë pikë me dy kulme fqinjë të fletës.

USHTRIME

- 1 Për secilin nga këndet e dhëna në figurë:

- a) gjeni masën në shkallë;
- b) konstruktoni simetralen e tij.

- 2 Me anë të këndmatësit ndani një kënd të drejtë:

- a) në dy kënde të barabarta; b) në katër kënde të barabarta.

- 3 Këndi që simetralja e këndit $\angle AOB$ formon me krahun [OA) të tij është 35° . Konstruktoni këndin $\angle AOB$.

- 4 Konstruktoni një kënd që është:

- a) komplementar i një këndi me masë 37° ; b) suplementar me një kënd me masë 37° .



Fig. 2.33

2.5 Konstruktimi i disa këndeve të veçanta

A Kërkoni dhe zbuloni

Me anë të vizores dhe të këndmatësit konstruktioni këndet 90° ; 60° ; 45° .

Konstruktioni këto kënde me anë të vizores dhe të kompasit.

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen si vepruat për konstruktimin e këndeve.

B Vrojtoni dhe mësoni

- Konstruktimin e këndit 90° me anë të vizores dhe të kompasit mund ta kryejmë duke konstruktuar simetralen e një segmenti $[AB]$. Argumentoni.

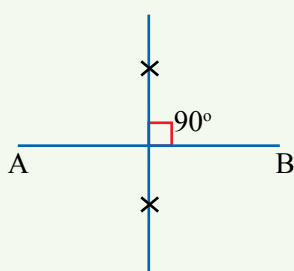


Fig. 2.34

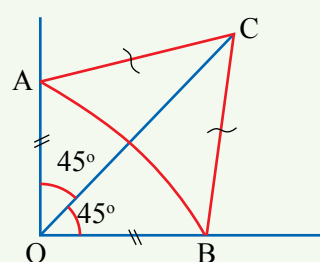


Fig. 2.35

- Konstruktimin e këndit 45° me anë të vizores dhe të kompasit mund ta kryejmë duke konstruktuar simetralen e një këndi të drejtë. Argumentoni.
- Konstruktimin e këndit 60° me anë të vizores dhe të kompasit mund ta kryejmë duke konstruktuar një trekëndësh barabrinjës. Argumentoni.
- Konstruktimin e këndit 30° me anë të kompasit dhe të vizores mund ta kryejmë duke konstruktuar në fillim një kënd 60° dhe pastaj duke konstruktuar simetralen e tij.
- Konstruktimin me anë të vizores dhe të kompasit të disa këndeve të tjera të veçanta, mund ta kryejmë duke i paraqitur ata si shumë apo ndryshim i këndeve të mësipërme (90° , 60° , 45° , 30°).

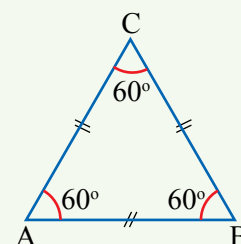


Fig. 2.36

Shembull

Në figurën 2.37 është paraqitur konstruktimi i këndit 135° ($135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$).

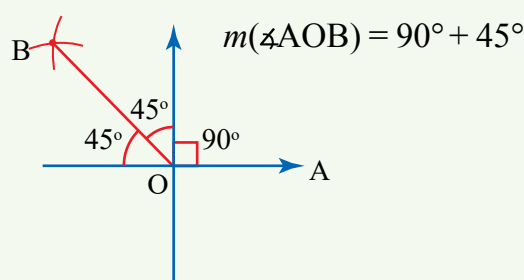


Fig. 2.37

**Punë në grup**

Përdorni cepin e fletores për të konstruktuar këndin 90° , 60° , 45° , 30° . Paloseni atë në dy, tri pjesë dhe konstruktioni këndet e kërkuara. Përdorni dy cepa fletorësh për të konstruktuar këndet 150° , 120° , 135° . Shpjegoni veprimet e kryera.

C Ushtroni duke zbatuar

- Shpjegoni një mënyrë tjetër për konstruktimin e këndit 30° , duke u bazuar në figurën 2.38.
- Me ndihmën e dy cepave të fletores mund të konstruktohet këndi 75° . Argumentoni si veprohet.
- Si mund ta ndani një picë që ka formën e një sipërfaqe rrethore në 6 pjesë të barabarta? Po në 8 pjesë të barabarta? Sa është me afërsi këndi i ndarjes në secilin rast?

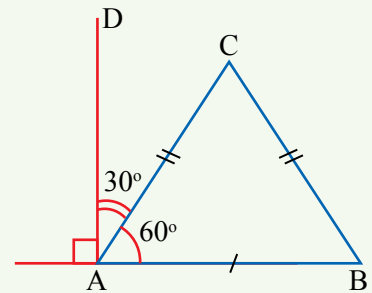


Fig. 2.38

USHTRIME

- Konstruktoni me vizore dhe këndmatës këndet 30° ; 15° ; 75° . Argumentoni veprimet e kryera.
- Konstruktoni me vizore dhe këndmatës këndet 120° ; 135° ; 150° . Argumentoni veprimet e kryera.
- Konstruktoni me vizore dhe këndmatës këndet 210° ; 225° ; 240° . Argumentoni veprimet e kryera.
- Konstruktoni me vizore dhe kompas këndin 75° . Argumentoni veprimet e kryera.
- Konstruktoni me vizore dhe kompas, me një tjetër mënyrë, këndin 15° . Argumentoni veprimet e kryera.
- Konstruktoni me vizore dhe kompas këndet 105° ; 120° ; 130° ; 150° . Argumentoni veprimet e kryera.
- Konstruktoni me vizore dhe kompas këndin 210° . Argumentoni veprimet e kryera.
- Konstruktoni dy kënde të përbrinjëshme.
 - Konstruktoni simetralet e tyre.
 - Matni këndin që formojnë këto simetralet. Çfarë vini re?
- Është dhënë $m(\angle AOB) = 120^\circ$.
 - Gjysmëdrejtëza [OC] ndodhet në pjesën e brendshme të këndit $\angle AOB$ dhe formon me OA këndin 80° . Gjeni këndin midis kësaj gjysmëdrejtëze dhe simetrales së këndit të dhënë.
 - Zgjidheni këtë ushtrim në rastin kur gjysmëdrejtëza [OC] shtrihet jashtë këndit $\angle AOB$.

2.6 Drejtëza normale (pingule)

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 2.39 janë paraqitur dy drejtëza s , t , që priten në pikën O . Masa e këndit $\angle AOB$ është 90° .

- Sa janë masat e tri këndeve të tjera, që e kanë kulmin në O ?
- Ç'mund të thoni për drejtëzat s , t ?

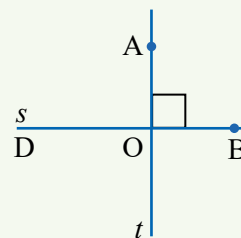


Fig. 2.39

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Dy drejtëza quhen normale (pingule) me njëra-tjetrën kur ato priten, duke formuar kënde të drejta. Kur drejtëzat a , b janë normale (pingule), simbolisht shkruajmë $a \perp b$.

Veti të drejtëzave normale (pingule)

- Nëse është dhënë një drejtëz r dhe një pikë çfarëdo P , ekziston një dhe vetëm një drejtëz s , që kalon nëpër pikën P dhe është pingule me drejtëzën r (fig. 2.40/a).
- Dy drejtëza s , t , që janë të dyja pingule me një drejtëz të tretë r , nuk priten midis tyre (fig. 2.40/b).

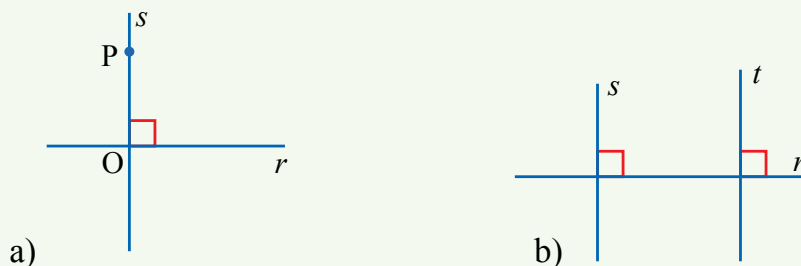


Fig. 2.40

Konstruktive me kompas dhe vizore

- Është dhënë drejtëza d dhe pika A e saj. Konstruktioni pingulen me drejtëzën d dhe që kalon nëpër pikën A .
 - Me qendër në pikën A dhe me rreze të çfarëdoshme konstruktojmë, me anë të kompasit, dy harqe të një rrethi, që presin drejtëzën d në pikat B , C (fig. 2.41).
 - Konstruktojmë dy harqe të tjera, me të njëjtën rreze, por më të madhe se $[AB]$, njërin me qendër në pikën B dhe tjetrin me qendër në pikën C . Le të jetë pika D , pika ku këto harqe priten.
 - Konstruktojmë me vizore drejtëzën (AD) . Ajo është pingulja e kërkuar $(AD) \perp d$.

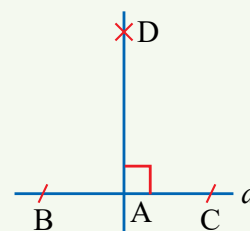


Fig. 2.41

II. Është dhënë drejtëza d dhe pika M jashtë saj. Konstruktoni drejtëzën, që kalon nëpër pikën M dhe është pingule me d .

a) Me qendër në pikën M konstruktojmë, me anë të kompasit, një hark rrethi që të presë drejtëzën d në dy pika E, F (fig. 2.42).

b) Konstruktojmë dy harqe rrrathësh me të njëjtën rreze (më të madhe se gjysma e $[EF]$, njërin me qendër pikën E , e tjetrin me qendër në pikën F . Le të jetë pika N , pika ku ata priten.

c) Konstruktojmë me vizore drejtëzën (MN) . Ajo është pingulja e kërkuar $(MN) \perp d$.

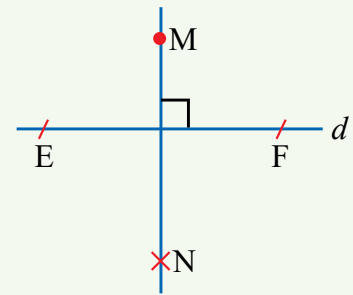


Fig. 2.42

C Ushtroni duke zbatuar

- Vizatoni në fletoren tuaj një drejtëz d , një pikë L në të dhe një pikë K jashtë saj. Konstruktoni pingulen me drejtëzën d që kalon: a) nëpër pikën L ; b) nëpër pikën K .
- Vizatoni një kënd me kulm në O dhe me masë 80° . Tërhiqni ndaj krahëve të tij pingulet nëpër pikën O dhe merrni rrezet e këtyre pinguleve jashtë këndit 80° . Sa është këndi që formojnë ato?
- Shkronja T është një nga shkronjat e alfabetit që ka drejtëza pingule. Gjeni shkronja të tjera të mëdha shtypi ku të ketë drejtëza pingule.

USHTRIME

1 Në figurën 2.43, konstruktoni drejtëzën që është pingule me drejtëzën m dhe që kalon:

a) nëpër pikën R ; b) nëpër pikën Q ; c) nëpër mesin e segmentit $[RQ]$.

Konstruktimi të bëhet:

- me vizore dhe me trekëndësh vizatimi;
- me vizore dhe me këndmatës;
- me vizore dhe me kompas.

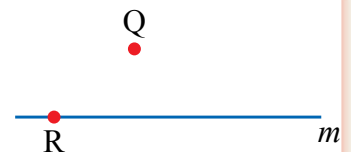


Fig. 2.43

2 Drejtëzat p, q priten në pikën O . Në drejtëzën p merret pika A . Konstruktoni:

- pingulen ndaj p , të hequr nëpër pikën O ;
- pingulen ndaj q , të hequr nëpër pikën A .

3 Konstruktoni këndin plotësues të secilit prej këndeve të paraqitura në figurën 2.44.

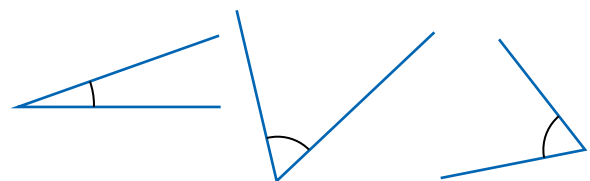


Fig. 2.44

4 Vizatoni një kënd të ngushtë me kulm në pikën O dhe merrni një pikë P në pjesën e brendshme të tij. Konstruktoni pingulet me krahët e këndit, të cilat kalojnë nëpër pikën P . Sa është masa e këndit që formojnë këto dy pingule?

5 Përsëritni ushtrimin 4, kur këndi me kulm në pikën O është i gjerë.

2.7 Drejtëza paralele

A Kërkoni dhe zbuloni

Kërkoni në mjedisin e klasës suaj drejtëza normale (pingule) dhe drejtëza paralele. A kanë gjetur dhe shokët/shoqet të njëjtat çifte drejtëzash si ju? Bashkëbisedoni.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Dy drejtëza në rrafsh, që nuk kanë asnjë pikë të përbashkët, quhen drejtëza paralele. Nëse drejtëzat a , b janë paralele, simbolikisht shkruajmë $a \parallel b$.

Veti të drejtëzave paralele

- I. Nëse është dhënë drejtëza a dhe një pikë M që nuk ndodhet në të, atëherë ekziston një dhe vetëm një drejtëz që kalon nëpër pikën M dhe është paralele me a (fig. 2.45).

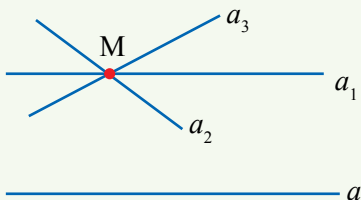


Fig. 2.45

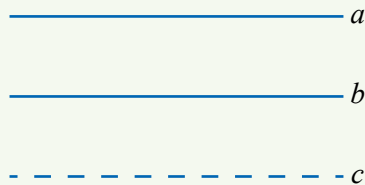


Fig. 2.46

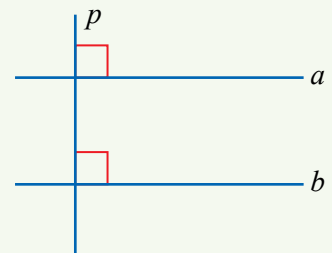


Fig. 2.47

- II. Dy drejtëza a , b që janë paralele me një drejtëz c , janë paralele midis tyre. Në figurën 2.46 kemi $a \parallel c$ dhe $b \parallel c$. Atëherë $a \parallel b$.
- III. Dy drejtëza a , b që janë pingule me një drejtëz të tretë p , janë paralele midis tyre. Në figurën 2.47 kemi $a \perp p$ dhe $b \perp p$. Atëherë $a \parallel b$.

Konstruktimi i drejtëzës paralele me një drejtëz të dhënë a

Mënyra e parë

Duke u bazuar në vetinë III, fillojmë me ndërtimin e pingules p me drejtëzën a , që kalon nëpër pikën A jashtë drejtëzës. Më pas konstruktojmë pingulen me drejtëzën p , që kalon nga pika A .

Mënyra e dytë

Ka një tjetër praktikë për konstruktimin e paraleles me një drejtëz të dhënë a , nëpër pikën A jashtë kësaj drejtëze, duke përdorur vizoren dhe trekëndëshin e vizatimit (me rrëshqitje), siç ilustrohet në figurën 2.48.

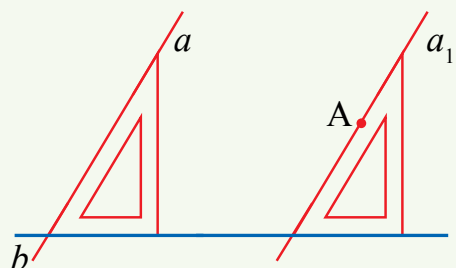


Fig. 2.48

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Sipas mënyrës së dytë, plotësoni figurën 2.49, duke konstruktuar drejtëzën që kalon nëpër pikën E dhe është paralele me drejtëzën d .

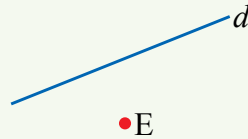


Fig. 2.49

2. Konstruktioni katërkëndëshin MNPQ tek i cili:
 a) $[MN] \parallel [PQ]$ dhe $[MQ] \parallel [NP]$; b) $[MN] \parallel [PQ]$ dhe $[MQ]$ e $[PN]$ prerëse.

3. Shkronja H është një nga shkronjat që ka drejtëza paralele. Shkruani shkronja të tjera të alfabetit që kanë drejtëza paralele.

USHTRIME

- 1 Tregoni se në cilin rast drejtëzat e paraqitura në figurën 2.50 janë:

a) paralele; b) pingule.

Si mund t'i kontrolloni përgjigjet tuaja?

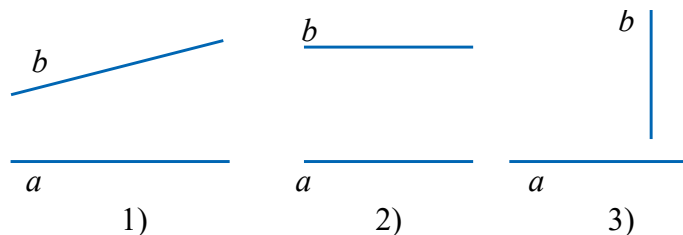


Fig. 2.50

- 2 Vizatoni dy drejtëza r , s pingule midis tyre. Pastaj konstruktioni drejtëzën u , paralele me r dhe drejtëzën v paralele me s . Si janë midis tyre drejtëzat u dhe v ?
- 3 Vizatoni tri drejtëza r , s , t që plotësojnë këto kushte:
 a) $r \parallel s$ dhe $s \parallel t$;
 b) $r \parallel s$ dhe $s \perp t$;
 c) $r \perp s$ dhe $s \perp t$;
 d) $r \perp s$ dhe $s \parallel t$.
- 4 Vizatoni tri gjysmëdrejtëza me origjinë përkatësisht pikat A, B, C, që nuk kanë asnjë pikë të përbashkët. Pastaj vizatoni dy drejtëza a , b paralele midis tyre, dhe që i presin tri gjysmëdrejtëzat përkatësisht në pikat D, E, F dhe G, H, I. Tregoni të gjitha gjysmëdrejtëzat që formohen.
- 5 Është dhënë këndi $\angle AOB$ dhe një pikë M në rrafsh. Nga pika M tërhiqni drejtëzat paralele përkatësisht me $[OA]$ dhe me $[OB]$. Matni këndet që formohen dhe krahasoni masat e tyre me masën e $\angle AOB$.

2.8 Këndet që formohen në dy drejtëza paralele, kur ato priten nga një drejtëz e tretë

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 2.51 janë paraqitur dy drejtëza paralele a , b të prera nga një drejtëz e tretë c . Drejtëza prerëse c quhet **transversale**.

- Tregoni me matje që masat e këndeve $\angle 1$ dhe $\angle 2$ janë të barabarta.
- Duke përdorur këtë fakt, tregoni që edhe masat e këndeve $\angle 3$ dhe $\angle 2$ janë të barabarta.

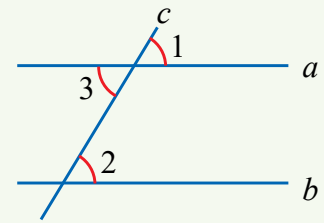


Fig. 2.51

B Vrojtoni dhe mësoni

Në figurën 2.52, drejtëzat paralele a dhe b , ($a \parallel b$) priten nga transversalja c . Në këtë rast formohen 8 kënde, të cilat gëzojnë vetitë e mëposhtme.

- Këndi $\angle 3$ me këndin $\angle 5$ dhe këndi $\angle 4$ me këndin $\angle 6$ quhen **kënde shndërruese të brendshme**. Këto janë dy nga dy të barabarta: $\angle 3 = \angle 5$ dhe $\angle 4 = \angle 6$.

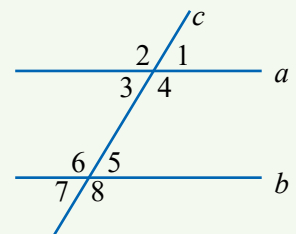


Fig. 2.52

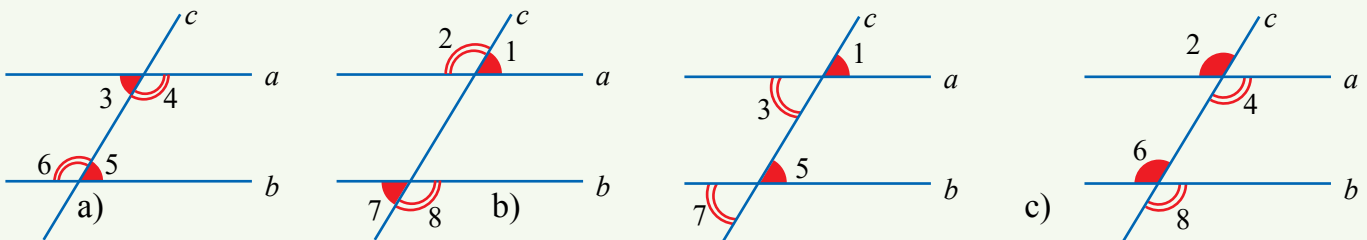


Fig. 2.53

- Këndi $\angle 1$ me këndin $\angle 7$ dhe këndi $\angle 2$ me këndin $\angle 8$ quhen **kënde shndërruese të jashtme**. Këto janë dy nga dy të barabarta: $\angle 1 = \angle 7$ dhe $\angle 2 = \angle 8$.
- Këndi $\angle 1$ me këndin $\angle 5$ dhe këndi $\angle 3$ me këndin $\angle 7$; këndi $\angle 2$ me këndin $\angle 6$ dhe këndi $\angle 4$ me këndin $\angle 8$ quhen **kënde përgjegjëse**. Këto janë katër nga katër të barabarta: $\angle 1 = \angle 5 = \angle 3 = \angle 7$ dhe $\angle 2 = \angle 6 = \angle 4 = \angle 8$.



Mbani mend:

Nëse dy drejtëza paralele priten nga transversalja, atëherë formohen:

- kënde shndërruese të brendshme të barabarta;
- kënde shndërruese të jashtme të barabarta;
- kënde përgjegjëse të barabarta.

Shembull

Në figurën 2.54 janë dhënë drejtëzat a , b , që të prera nga transversalja c formojnë 8 kënde, masat e dy prej të cilëve janë të njohura. A janë paralele këto drejtëza?

Zgjidhje

Këndi x dhe këndi me masë 140° janë të përbrinjëshëm, pra shuma e masave të tyre është 180° . Kemi $x + 140^\circ = 180^\circ$, pra $x = 40^\circ$. Por këndi x dhe këndi 40° janë kënde përgjegjëse, të formuara kur a, b priten nga c . Meqenëse këto kënde kanë masa të barabarta, del që $a \parallel b$.

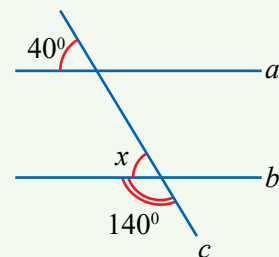


Fig. 2.54

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Gjeni masat e 7 këndeve të tjera në figurën 2.55.

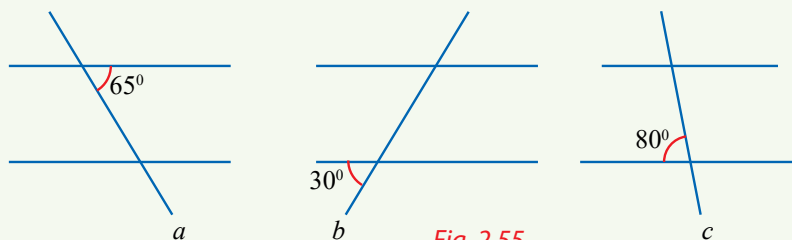


Fig. 2.55

2. A janë paralele drejtëzat a, b të paraqitura në figurën 2.56? Arsyetoni përgjigjen.

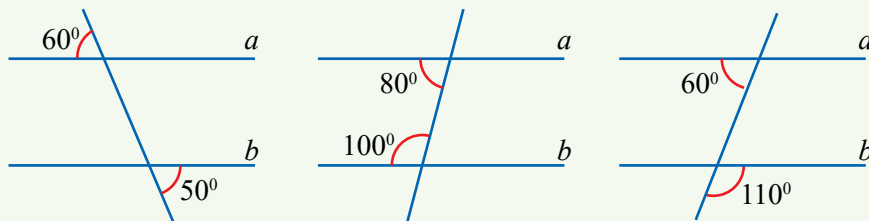


Fig. 2.56



3. Dy drejtëza a, b janë paraqitur me anë të dy segmenteve që nuk priten. Si mund t'i gjejmë këndet që formojnë këto drejtëza?

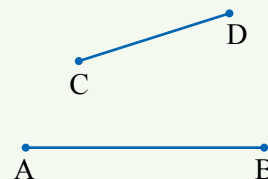


Fig. 2.57

USHTRIME

1 Në figurën 2.58 janë paraqitur katër drejtëza a, b, c, d dy nga dy prerëse.

a) Gjeni masat e 16 këndeve në figurë. b) A janë paralele a me b ; c me d ?

2 Në figurën 2.59 është paraqitur trekëndëshi ABC dhe $[BD][AC]$, ku këndi $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ dhe këndi $m(\sphericalangle B) = 85^\circ$. Gjeni masat e këndeve të panjohura $\sphericalangle x, \sphericalangle y, \sphericalangle u, \sphericalangle v$.

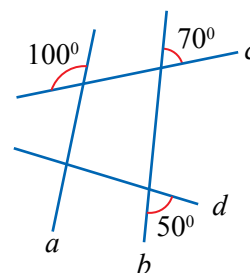


Fig. 2.58

3 Në figurën 2.60, (AB) dhe (CD) janë drejtëza paralele. Gjeni masat e këndeve $\sphericalangle x, \sphericalangle y, \sphericalangle u, \sphericalangle v$.

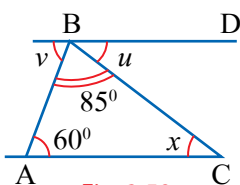


Fig. 2.59

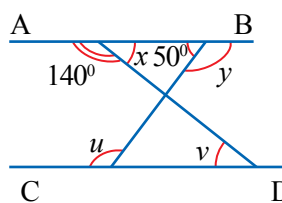


Fig. 2.60

2.9 Largesë. Projektioni i pikës dhe i segmentit në drejtëz

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 2.61, drejtëza a është paralele me drejtëzën b . Pingulet e hequra prej pikave A, B, C , të drejtëzës a mbi drejtëzën b , presin drejtëzën b përkatësisht në pikat A_1, B_1, C_1 . Tregoni me matje se kemi $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Merrni pika të tjera në drejtëzën a . Hiqni pingule mbi drejtëzën b . Kryeni matjen e largesës. Kontrolloni rezultatin tuaj me atë të shokut/shoqes. Tregoni çfarë vini re.

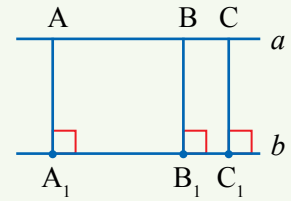


Fig. 2.61

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Largesë nëpër pikën A , B quajmë gjatësinë e segmentit $[AB]$.

Largesë të pikës A nga drejtëza d quajmë gjatësinë e segmentit të pingules së hequr nga pika A ndaj drejtëzës d .

Në figurën 2.62, nëpër pikën A është hequr drejtëza p , pingule ndaj drejtëzës d . Pika H është pika e prerjes së drejtëzave p dhe d . Gjatësia e segmentit $[AH]$ është largesa e pikës A nga drejtëza d . Pika H quhet **projeksion** normal i pikës A në drejtëzën d .

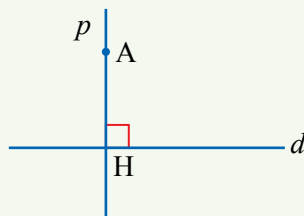


Fig. 2.62

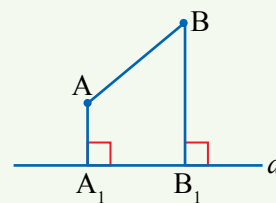


Fig. 2.63

Nëse kemi një segment $[AB]$ në rrafsh, duke hequr pingulet nga skajet e tij ndaj drejtëzës d , gjejmë projektionet e këtyre skajeve mbi drejtëzën d .



Mbani mend:

Segmenti $[A_1B_1]$ quhet projektion normal i segmentit $[AB]$ në drejtëzën d .

Nëse drejtëza e caktuar nga pikat A dhe B është normale me drejtëzën d , atëherë projektioni normal i segmentit $[AB]$ në drejtëzë është një pikë. (Fig. 2.64)

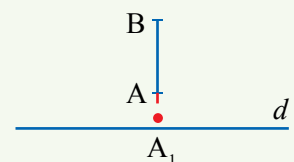


Fig. 2.64

Largesë midis dy drejtëzave paralele



Mbani mend:

Nëse drejtëza a është paralele me drejtëzën b , atëherë të gjitha pikat e drejtëzës a kanë largesa të barabarta nga drejtëza b .

Në figurën 2.61, drejtëza a është paralele me drejtëzën b . Projektionet e pikave A , B , C , të drejtëzës a mbi drejtëzën b , janë përkatësisht A_1 , B_1 , C_1 . Kemi $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Këto largesa ($[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$) të barabarta japin largesën midis drejtëzave a dhe b .



Mbani mend:

Largesë midis dy drejtëzave paralele quajmë largesën e një pike çfarëdo të njërës drejtëz prej drejtëzës tjetër.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Shqyrtoni figurën 2.65, ku drejtëza (AB) është paralele me d . Vendosni krahas çdo fjalie shkronjën V, kur ajo është e vërtetë dhe shkronjën G, kur ajo është e gabuar. (M është mesi i segmentit $[AB]$).

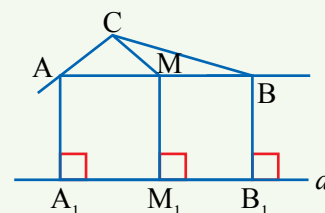


Fig. 2.65

- $AA_1 = MM_1 = BB_1$. _____
- Projeksioni i segmentit $[AB]$ mbi drejtëzën d është $[A_1B_1]$. _____
- Projeksioni i segmentit $[AC]$ mbi drejtëzën d është $[A_1M_1]$. _____
- Segmenti $[CM]$ është simetrale e segmentit $[AB]$. _____
- Drejtëza (MM_1) është simetrale e segmentit $[AB]$. _____



- Vizatoni një kënd $\angle AOB$ dhe konstruktioni simetralen e tij $[OC]$.
 - Merrni në simetrale një pikë P dhe shfaqni në figurë largesat e pikës P nga brinjët e këndit.
 - Matni këto largesa. Ç'vini re?

USHTRIME

- Vizatoni një drejtëz d dhe një pikë A jashtë saj.
 - Konstruktioni projektionin e pikës A në drejtëzën d .
 - Cili është segmenti më i shkurtër nga ata që bashkojnë pikën A me pika të drejtëzës d ?
- Është dhënë drejtëza d .
 - Konstruktioni drejtëzën pingule me d dhe që kalon nëpër pikën A të drejtëzës.
 - Merrni në këtë pingule një pikë M , që ta ketë largesën nga d të barabartë me 2 cm. Sa të tilla ka?
 - Nga pika e gjetur M hiqni një drejtëz paralele me d . Sa është largesa e saj nga drejtëza d ?
- Konstruktioni drejtëzën paralele me një drejtëz të dhënë a , në largesën 3 cm prej saj. Sa drejtëza të tilla ka?
- Vizatoni në rrafsh dy segmente të ndryshme, që kanë pikën C si projeksione të tyre në drejtëzën d .



Fig. 2.66

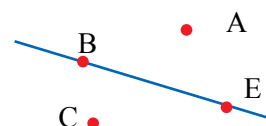


Fig. 2.67

2.10 Simetralja (përmesorja) e segmentit

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Vizatoni një segment $[AB]$. Konstruktioni simetralen e segmentit:

a) me vizore;

b) me vizore dhe kompas.

Argumentoni veprimet e kryera.

B Vrojtoni dhe mësoni

Le të kemi segmentin $[AB]$ dhe le të jetë M mesi i tij. Heqim drejtëzën p , që kalon nëpër pikën M dhe që është pingule me drejtëzën (AB) . Kjo drejtëz p quhet simetrale (përmesore) e segmentit $[AB]$.

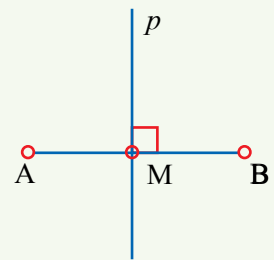


Fig. 2.68



Mbani mend:

Simetrale (përmesore) e një segmenti quhet drejtëza pingule me këtë segment dhe që kalon nëpër mesin e një segmenti. Ajo është e vetme.

Konstruktimi i simetrales së segmentit me kompas dhe vizore

Për të konstruktuar simetralen e segmentit $[AB]$ veprojmë kështu:

1. me qendër A dhe rreze sa gjatësia e segmentit $[AB]$ ndërtojmë një hark rrethi;
2. me qendër B dhe rreze sa gjatësia e segmentit $[AB]$ ndërtojmë një tjetër hark rrethi;
3. le të jenë M, N pikat ku këto dy harqe priten.

Tërheqim me vizore drejtëzën (MN) . Ajo do të jetë simetrale e segmentit $[AB]$.

Duke bërë veprimet e mësipërme, kemi zgjidhur edhe dy probleme të tjera:

1. Gjetjen e mesit të segmentit $[AB]$, që është pika e prerjes së segmentit me simetralen.
2. Ndarjen e segmentit $[AB]$ në dy pjesë të barabarta.

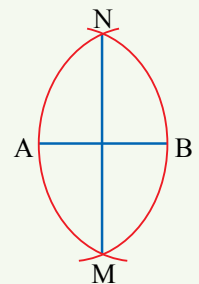


Fig. 2.69



Punë në grup

Bashkoni pikat M dhe N të simetrales me skajet e segmentit $[AB]$. Matni gjatësinë e segmenteve $[AM]$ dhe $[BM]$. Matni gjatësitë e segmenteve $[AN]$ dhe $[BN]$. Krahasoni gjatësitë. Merrni pika të tjera në simetrale. Bashkoni pikat me skajet e segmentit. Krahasoni largësinë e pikës së simetrales nga skajet e segmentit. Çfarë vini re?



Mbani mend:

Çdo pikë e simetrales (përmesores) së segmentit është e baraslarguar nga skajet e segmentit.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Vizatoni një segment $[AB]$ dhe konstruktoni simetralen p të tij.
 - Gjeni në simetrals pikën që është 5 cm larg nga skajet e segmentit.
 - Sa pikë të tilla mund të gjeni?
- Jepet këndi $\angle ABC$. Konstruktoni simetralen e krahëve $[AB]$ dhe $[BC]$. Bashkoni pikën e prerjes me pikat A, B dhe C. Krahasoni gjatësinë e segmenteve të përfutuara.

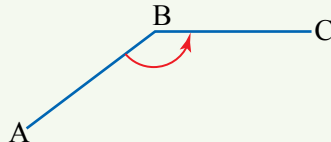


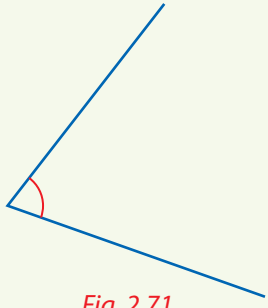
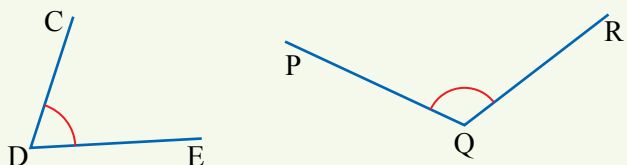
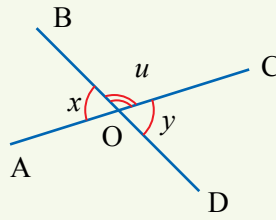
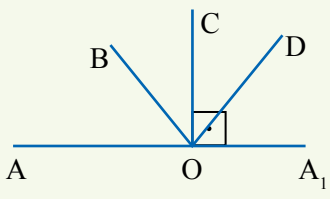
Fig. 2.70

- 
 Largesat tuaja nga dy kulme të dyshemesë së dhomës janë 2,3 m dhe 2,4 m. A ndodheni në simetralen e segmentit që bashkon këto dy kulme?

USHTRIME

- Në një drejtëz janë dhënë njërë pas tjetres katër pika: A, B, C, D, në mënyrë të tillë që largesa AB të jetë e njëjtë me largesën $[CD]$.
 - Konstruktoni simetralen e segmentit $[BC]$.
 - Konstruktoni simetralen e segmentit $[AD]$.
 - Ç'vini re? Pse?
- Jepen tri pika: A, B, C, që nuk i takojnë një drejtëze.
 - Konstruktoni simetralen r të segmentit $[AB]$ dhe simetralen s të segmentit $[BC]$.
 - A mund të jenë r dhe s drejtëza paralele?
 - Konstruktoni simetralen t të segmentit $[AC]$.
 - Ç'vini re?
- Është dhënë drejtëza r dhe një pikë A jashtë saj. Gjeni pikën B, në mënyrë që drejtëza r të jetë simetrale e segmentit $[AB]$.
- Vizatoni në fletoren tuaj një segment $[CD]$. Me anë të kompasit dhe të vizores:
 - konstruktoni simetralen e segmentit $[CD]$;
 - ndani segmentin $[CD]$ në 4 pjesë të barabarta.
- Vizatoni në fletore një segment $[AB]$ me gjatësi 5,5 cm. Ndajeni atë në dy pjesë të barabarta, duke përdorur vizore dhe kompas.
- Vizatoni një segment $[MN]$. Konstruktoni simetralen e segmentit.
 - Gjeni në të një pikë që është 2 cm larg nga segmenti. Sa pika të tilla mund të gjeni?
 - Bashkoni pikën e gjetur me skajet e segmentit. Matni distancën nga skajet e segmentit. Çfarë vini re?

2.11 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

<i>Tashmë kemi mësuar</i>	<i>Provoni të zgjidhni</i>
Konstruktimin e këndit kongruent me këndin e dhënë.	1. Konstruktioni këndin kongruent me këndin e dhënë në figurën 2.71. 2. Konstruktioni këndet: 145°, 30°, 235°. Argumentoni veprimet e kryera.  <i>Fig. 2.71</i>
Konstruktimin e simetrales së këndit.	3. Konstruktioni simetralen e këndeve.  <i>Fig. 2.72</i> Argumentoni veprimet e kryera.
Konstruktimin e simetrales së segmentit të dhënë.	4. Konstruktioni simetralen e një segmenti të vizatuar në fletore. Gjeni në të pikat që ndodhen 3 cm dhe 4 cm larg kulmeve të segmentit. Sa pika të tilla mund të gjeni?
Përdorimin e njësive për matjen e këndit: shkalla, minuta dhe sekonda dhe shndërrimin prej një njësie në tjetrën.	5. Tregoni sa minuta dhe sa sekonda këndore ka: a) $40^\circ = \dots\dots\dots' = \dots\dots\dots''$ b) $100^\circ = \dots\dots\dots' = \dots\dots\dots''$ 6. Plotësoni barazimin: a) $250' = \dots\dots\dots^\circ \dots\dots\dots'$ b) $3\,700'' = \dots\dots\dots^\circ \dots\dots\dots' \dots\dots\dots''$
Mbledhja dhe zbritja, këndet e dhëna në mënyrë konstruktive dhe aritmetike.	7. Kryeni veprimet: a) $65^\circ 45' + 80^\circ 35'35'' = \dots$; b) $76^\circ 40' 56'' - 36^\circ 50' 20'' = \dots$ 8. Në figurën 2.73, është dhënë $m(\angle u) = 120^\circ 20'$. Gjeni masën e këndeve të tjera.  <i>Fig. 2.73</i> 9. Këndi $\angle AOC$ është kënd i drejtë dhe OC është simetrale e këndit $\angle BOD$. Gjeni masën e të gjithë këndeve me sa më pak matje.  <i>Fig. 2.74</i>

Konstruktimi i këndeve 60°, 30°, 15°, 90°, 45°, 120° etj., duke shfrytëzuar metoda të ndryshme (p.sh.: fletët palosëse, këndmatësin, vizoren dhe kompasin).	10. Konstruktioni këndet 30°, 60°, 120°, 240° duke përdorur metoda të ndryshme. Argumentoni veprimet. 11. Konstruktioni me këndmatës këndet 35°, 80°, 220°.
Caktimin e këndit komplementar dhe suplementar të këndit të dhënë, me njehsim dhe me konstruktim.	12. Ndër dy kënde suplementare, njëri është $35^\circ 20'$ më i madh se tjetri. Sa është masa e secilit prej këtyre këndeve? 13. Ndër dy kënde komplementare, njëri është $5^\circ 30'$ më i vogël se tjetri. Gjeni masën e secilit prej këndeve.
Konstruktimin e drejtëzave normale dhe paralele.	14. Konstruktioni drejtëzën që kalon nëpër pikën A, jashtë drejtëzës d, dhe është: - normale me drejtëzën d; - paralele me drejtëzën d.
Vetitë e këndeve që formohen kur drejtëzat paralele priten nga transversalja dhe emërtimin e tyre.	15. Gjeni masën e këndeve në figurë ($m \parallel n$). <i>Fig. 2.75</i> 16. Në trekëndëshin ABC kemi $\angle A = \angle B$. Drejtëza paralele me (AB) i pret dy brinjët e tjera të trekëndëshit në pikat D, E. Ç'loj trekëndëshi është CDE? 17. Njëri nga këndet që formojnë dy drejtëza paralele a, b, të prera nga c, është 18° më i madh se këndi i përbrinjëshëm me të. Gjeni masat e tetë këndeve që formohen. 18. Gjeni masat e këndeve që formohen nga dy drejtëza paralele a dhe b të prera nga transversalja c, nëse: - njëri nga këndet shndërrues të brendshëm është $60^\circ 30'$; - njëri nga këndet shndërrues të jashtëm është $120^\circ 30' 40''$.

2.12 Vlerësim

Koha: 45 minuta

- 1** Në figurën 2.76, tregoni të gjitha çiftet e këndeve që janë:
a) kryqëzuese; b) të përbrinjëshme.

(2 pikë)

- 2** Komplementi i një këndi është 20° më i madh se këndi.
Gjeni masën e këndit.

(3 pikë)

- 3** Vizatoni dy drejtëza prerëse. Konstruktioni simetralet e këndeve që ato formojnë. Verifikoni që dy nga këto simetralet formojnë kënd të shtrirë ose kënd të drejtë.

(4 pikë)

- 4** Gjeni masën e secilit kënd të shënuar me shkronjë. Argumentoni përgjigjen.

(3 pikë)

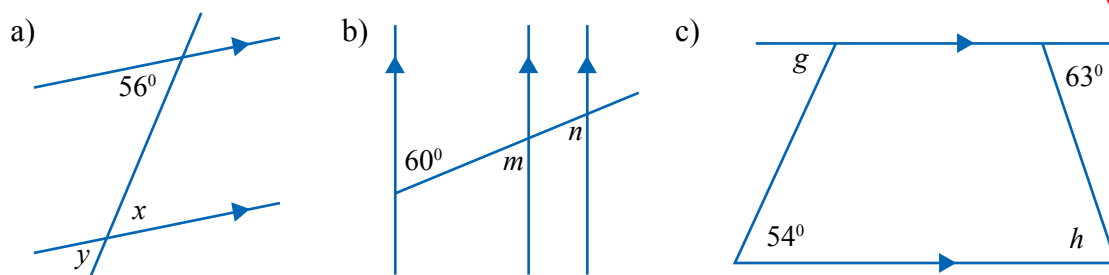


Fig. 2.77

- 5** Figurat më poshtë nuk janë vizatuar saktë. Në cilën prej tyre drejtëzat duhet të jenë paralele? Argumentoni përgjigjen.

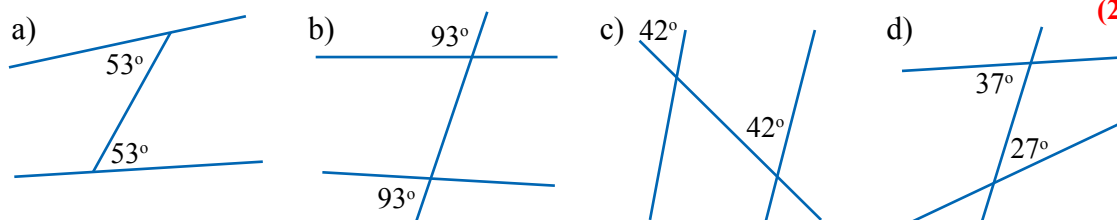


Fig. 2.78

- 6** Gjeni vlerën e x° në figurën 2.79.

(3 pikë)

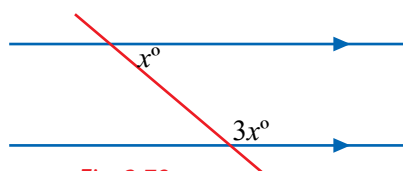


Fig. 2.79

- 7** Vizatoni një kënd $\angle ABC$. Konstruktioni këndin kongruent me të, duke përdorur vetëm kompas dhe vizore.

(3 pikë)

- 8** Vizatoni një kënd që është:

- a) komplementar i një këndi me masë 37° ;
b) suplementar i një këndi me masë 37° .

(4 pikë)

- 9** Vizatoni dy drejtëza r, s pingule midis tyre. Pastaj konstruktioni drejtëzën u , paralele me r dhe drejtëzën v paralele me s . Si janë midis tyre drejtëzat u dhe v ?

(3 pikë)

3

Numrat e plotë

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- dallon numrat e plotë (pozitivë dhe negativë);
- paraqet numrat e plotë në drejtëzën numerike;
- krahason numrat e plotë;
- njehson shumë, ndryshim, prodhim dhe herës të numrave të plotë;
- zbaton radhën e veprimeve aritmetike në shprehje numerike;
- përkufizon bashkësinë e numrave të plotë si bashkësi të mbyllur ndaj mbledhjes, zbritjes dhe shumëzimit;
- modelon dhe zgjidh barazime (barazi) dhe mosbarazime (jobarazi), duke përdorur numra të plotë.



Fjalë kyçe:

numër i plotë, bashkësia e numrave të plotë, numër pozitiv, numër negativ, drejtëz numerike, krahasim, shumë, ndryshim, prodhim, herës, barazi, jobarazi, shprehje numerike.

A E DINI SE...?

Kinezët e lashtë përdornin shkopinj me ngjyra për të ndërtuar simbolet e numrave. Ata përdornin shkopinj të kuq për shifrat pozitive dhe shkopinj me ngjyrë të zezë për shifrat negative. Kështu arritën të shkruanin e të zgjidhnin ekuacione të thjeshta. Në Indinë e lashtë, numrat pozitivë u interpretuan si pronë, ndërsa numrat negativë si borxh, duke përdorur edhe konceptin e zeros.

Në shekullin XV dhe XVI, vlerat negative në Europë ishin të njohura si numra absurdë dhe madje, edhe në shekullin XVII, shumë i kanë quajtur të pakuptimta. Por, zgjidhja e shumë problemeve praktike tregoi domosdoshmërinë e numrit me shenjë. Një kontribut shumë të madh në studimin e numrave me shenjë, e ka dhënë matematikani i njohur dhe filozofi francez René Dekart (*René Descartes*), në shekullin XVI-XVII.

Njohja përfundimtare dhe e përgjithshme e numrave negativë u arrit vetëm në gjysmën e parë të shekullit XVIII. Në të njëjtën kohë, u konfirmua teoria moderne për këta numra.



3.1 Kuptimi i numrit të plotë. Mbledhja dhe zbritja

A Kërkoni dhe zbuloni

Pika më e lartë e Tokës, ku mund të shkelë këmba e njeriut është maja e malit Everest, 8848 metra. Pika më e ulët e tokës është në bregun e Detit të Vdekur, 393 metra thellësi. Cili është ndryshimi ndërmjet këtyre dy vlerave numerike?

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

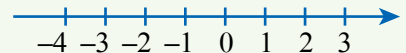
Numrat natyrorë, numrat e plotë negativë dhe numri zero quhen **numra të plotë**.

Bashkësia e numrave të plotë shënohet me shkronjën Z .

Numrat e plotë m dhe $-m$ quhen **të kundërt të njëri-tjetrit**.

Numrat e plotë pozitivë shënohen: $+1; +2; +3; +4; \dots$, ose $1; 2; 3; 4; \dots$; numrat e plotë negativë shënohen: $-1; -2; -3; -4; \dots$.

Në boshtin numerik, çdo numri të plotë i përgjigjet një pikë.



Ndër dy numra të plotë çfarëdo, më të vogël do të konsiderojmë atë, që e ka pikën përgjegjëse të vendosur majtas pikës përgjegjëse të tjetrit.

Kemi: $-4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4$.



Mbani mend:

- Çdo numër i plotë negativ është më i vogël se zero.
- Çdo numër i plotë pozitiv (çdo numër natyror) është më i madh se zero.
- Çdo numër i plotë negativ është më i vogël se çdo numër i plotë pozitiv.
- Ndër dy numra negativë, më i vogël është ai që e ka pikën përgjegjëse më larg origjinës.
- Ndër dy numra negativë, më i vogël është ai që e ka të kundërtin më të madh.



Mbani mend:

- Për të gjetur shumën e dy numrave të plotë negativë, mbledhen të kundërtit e tyre dhe para shumës së gjetur vendoset shenja $(-)$.
- Për të gjetur shumën e dy numrave të plotë me shenja të ndryshme (shumën e numrit natyror n me numrin e plotë negativ $-m$), veprojmë kështu:
 - Gjejmë numrin natyror, që është i kundërti i numrit negativ (m).
 - Gjejmë ndryshimin midis numrave natyrorë n, m (nga më i madhi zbritim më të voglin).
 - Rezultatit të gjetur i vëmë shenjë $(+)$, kur $n > m$ dhe i vëmë shenjë $(-)$, kur $n < m$.

Shembulli 1

- $(-5) + (-7) = -12$, sepse të kundërtit janë 5; 7 dhe $5 + 7 = 12$.
- $(-12) + (+4)$ i kundërti i (-12) është 12 dhe $12 > 4$. Gjejmë $12 - 4 = 8$.
Atëherë $(-12) + 4 = -8$.

Shuma e dy numrave të kundërt është 0: $m + (-m) = 0$

Mbledhja e numrave të plotë gëzon vetinë e ndërrimit dhe atë të shoqërimit. Për tre numra të plotë a, b, c kemi: $a + b = b + a$ dhe $(a + b) + c = a + (b + c)$.

**Mbani mend:**

Ndryshim të numrit a me numrin b quajmë numrin e plotë, që po të mblidhet me b , jep a . Ky ndryshim shënohet $a - b$. Për të zbritur nga një numër i plotë një tjetër, mjafton që të zbritshmin ta mbledhim me të kundërtin e zbritësit. Me anë të shkronjave, ky rregull shkruhet kështu: $a - b = a + (-b)$.

Shembulli 2

a) $(-15) - 20 = (-15) + (-20) = -35$ (pse?); b) $13 - (-17) = 13 + (+17) = 30$ (pse?).

**Mbani mend:**

Në bashkësinë e numrave të plotë, veprimi i zbritjes mund të kryhet gjithmonë. Bashkësia e numrave të plotë është bashkësi e mbyllur ndaj ndryshimit.

C Ushtroni duke zbatuar

- Paraqitni në boshtin numerik numrat -2 ; 0 ; 2 .
- Krahasoni: -3 me 2 ; -4 me 0 ; -5 me -7 .
- Gjeni shumën:
a) $(-7) + (-8)$; b) $(+13) + (-10)$; c) $(+5) + (-5)$; d) $(+15) + (-12)$.
- Gjeni ndryshimin:
a) $(+17) - (+13)$; b) $(+17) - (-13)$; c) $(-17) - 13$; d) $(-17) - (-17)$.
- Në temperaturën -183°C oksigjeni kthehet në gjendje të lëngët. Nëse temperatura ulet edhe me 31°C , atëherë oksigjeni ngrin. Cila është temperatura e ngrirjes së oksigjenit?

USHTRIME**1** Renditni:

a) në rritje: -5 ; 7 ; -10 ; 0 ; 4 ; -8 ; b) në zbritje: 6 ; -3 ; -4 ; 0 ; 2 ; -1 .

2 Zgjidhni ekuacionin, në bashkësinë Z të numrave të plotë.

a) $5 + x = 7$; b) $(-4) + x = (-6)$; c) $x + (-3) = -8$; d) $x + (-3) = 4$;

3 Krahasoni shumat, duke vënë ndërmjet tyre shenjën $<$ ose $>$ ose $=$.

a) $(-5) + (-4) \dots (-8) + (-1)$; b) $(-6) + (+4) \dots (+6) + (-5)$;

4 Në një stacion meteorologjik në Arktidë, u regjistrua temperatura -23°C . Dy orë më vonë temperatura u ul për 8°C .

- Gjeni sa gradë celsius shkoi temperatura.
- Katër orë pas leximit të parë të temperaturës, ajo shkoi në -41°C . Për sa gradë celsius kishte rënë temperatura pas katër orësh?



Temperatura e ngurtësimit të amoniakut është -78°C . Gjeni:

- temperaturën e ngurtësimit të merkurit, nëse ajo është 39°C më e lartë;
- temperaturën e ngurtësimit të alkoolit, nëse ajo është 21°C më e lartë se temperatura e ngurtësimit të amoniakut.

3.2 Shumëzimi i numrave të plotë

A Kërkoni dhe zbuloni

Ditën e hënë, temperatura më e ulët ishte -3°C . Në secilën nga ditët në vijim ajo u zvogëlua për 2 herë. Sa $^{\circ}\text{C}$ ishte temperatura më e ulët të enjten?

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Prodhiimi $5 \cdot 3$ është shuma e tre mbledhorëve, çdonjëri nga të cilët është 5.

$$5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15.$$

Është e natyrshme që si prodhim të numrit (-5) me 3 të marrim shumën e tre mbledhorëve, çdonjëri nga të cilët është -5 .

Meqenëse $(-5) + (-5) + (-5) = -15$, ne marrim $(-5) \cdot 3 = -15$.

Shumëzimi i dy numrave të plotë ruan vetinë e ndërrimit.

$$\text{Prodhimin } 3 \cdot (-5) = -(3 \cdot 5) = -(5 \cdot 3) = 5 \cdot (-3) = -15.$$

$$\text{Kështu shkruajmë } 3 \cdot (-5) = -15.$$

Matematikani i madh Euler, në shekullin XVIII, tregoi se, nëse duam që shumëzimi i dy numrave të plotë të gëzojë vetinë e shpërndarjes në lidhje me mbledhjen, atëherë prodhimi i (-5) me (-3) duhet marrë 15; $(-5) \cdot (-3) = 15$.

Kështu:

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ dhe } (-5) \cdot (-3) = 15;$$

$$3 \cdot (-5) = -15 \text{ dhe } 5 \cdot (-3) = -15.$$



Mbani mend:

Prodhiimi i dy numrave të plotë me të njëjtën shenjë është numër pozitiv, kurse prodhimi i dy numrave të plotë me shenja të ndryshme është numër negativ.

Shkurt, rregullën e shenjave gjatë shumëzimit e shprehim kështu: **“plus herë minus jep minus, minus herë minus jep plus”**.

Shumëzimi i numrave të plotë ka po ato veti që ka edhe shumëzimi i numrave natyrorë; të ndërrimit, të shoqërimit, të shpërndarjes në lidhje me mbledhjen dhe në lidhje me zbritjen.

Shembull

Njehsoni në dy mënyra $7 \cdot (2 - 3)$.

Zgjidhje

1. Gjejmë në fillim $2 - 3 = 2 + (-3) = -1$. Kemi $7 \cdot (-1) = -7$.

2. Duke përdorur vetinë e shpërndarjes, kemi: $7 \cdot (2 - 3) = 7 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 14 - 21 = -7$.



Mbani mend:

Numrat 0 dhe 1, gjatë shumëzimit me numra të plotë, ruajnë vetitë që kishin gjatë shumëzimit me numra natyrorë.

Kështu, për çdo numër të plotë m , kemi:

$$m \cdot 0 = 0 \text{ dhe } m \cdot 1 = m.$$

P.sh.: $(-4) \cdot 0 = 0$; $0 \cdot (-10) = 0$; $(-20) \cdot 1 = -20$; $1 \cdot (-5) = -5$.

Gjatë shumëzimit me numrin (-1) , numri i plotë jep të kundërtin e vet.

P.sh. $13 \cdot (-1) = -13$; $(-13) \cdot (-1) = 13$. Në përgjithësi, $m \cdot (-1) = -m$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni prodhimet:

- a) $7 \cdot 4$; b) $(-7) \cdot (-4)$; c) $7 \cdot (-4)$; d) $(-4) \cdot 7$.

2. Paraqitni numrat e mëposhtëm si prodhim dy numrash të plotë.

- a) -20 ; b) 30 ; c) -13 ; d) -1 .

3. Çfarë shenje do të ketë prodhimi i tre numrave të plotë, që janë:

- a) dy pozitivë dhe një negativ?
b) një negativ e dy pozitivë?
c) të tre negativë?



4. Nëndetësja ishte në thellësinë -100 m. Ajo u ngjit për 50 m, qëndroi dhe pastaj filloi të zhytej me shpejtësi 20 m në minutë. Në çfarë niveli do të jetë 5 minuta pas fillimit të zhytjes?



USHTRIME

1 Kryeni shumëzimet:

- a) $(+5) \cdot (-4)$; b) $(-12) \cdot (+3)$; c) $(+18) \cdot (-3)$; d) $(-3) \cdot (-4)$.

2 Njehsoni:

- a) $8 \cdot (-5)$; b) $-6 \cdot 4$; c) $-3 \cdot (-8)$; d) $-4 \cdot (-6)$.

3 Pa kryer shumëzimet, krahasoni prodhimet e mëposhtme me numrin zero.

- a) $-13 \cdot (-17)$; b) $14 \cdot (-18)$; c) $-12 \cdot 19$; d) $(+4) \cdot (+8)$.

4 Krahasoni numrat:

- a) $-24 \cdot 25$ me $(-24) \cdot (-25)$;
b) $14 \cdot (-13)$ me $-14 \cdot 13$;
c) $-41 \cdot (-21)$ me $41 \cdot (-21)$.

5 Gjeni faktorin e panjohur:

- a) $-5 \cdot x = 20$; b) $x \cdot (-8) = -40$; c) $-9 \cdot x = 27$; d) $x \cdot (-4) = -12$.

6 a, b janë numra të plotë. Në cilin rast kemi $a \cdot b > 0$?

- a) $a > 0$ dhe $b < 0$; b) $a < 0$ dhe $b < 0$; c) $a < 0$ dhe $b > 0$; d) $a > 0$ dhe $b > 0$.

7 Gjeni prodhimet:

- a) $20 \cdot (-5) \cdot 6$; b) $(-10) \cdot (-3) \cdot 4$; c) $-2 \cdot (-3) \cdot 25$; d) $4 \cdot (-4) \cdot (-1)$.

8 Renditni prodhimet në rritje:

- $-17 \cdot 23$; $-17 \cdot 38$; $-17 \cdot (-38)$; $(-17) \cdot (-23)$.

3.3 Pjesëtimi i numrave të plotë

A Kërkoni dhe zbuloni

Një zhytës ishte në thellësinë -80 m. Ai filloi të ngjitej drejt sipërfaqes së ujit, duke e zvogëluar thellësinë dy herë për çdo minutë. Në çfarë niveli thellësie do të jetë pas 3 minutash? Argumentoni.



B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Numri i plotë h quhet **herës** i pjesëtimit të numrit të plotë a me numrin e plotë b ($b \neq 0$), nëse $b \cdot h = a$. Në këtë rast shkruajmë $a : b = h$.

P.sh.: $3 \cdot 4 = 12$, prandaj $12 : 3 = 4$;
 $(-3) \cdot (-4) = 12$, prandaj $12 : (-3) = -4$;
 $(-3) \cdot 4 = -12$, prandaj $(-12) : (-3) = 4$;
 $3 \cdot (-4) = -12$, prandaj $(-12) : 3 = -4$.



Mbani mend:

Herësi i pjesëtimit të dy numrave të plotë me të njëjtën shenjë është numër pozitiv. Herësi i pjesëtimit të dy numrave të plotë me shenja të ndryshme është numër negativ.

Meqenëse $(-7) \cdot 0 = 0$, kemi $0 : (-7) = 0$.

Në përgjithësi $0 : a = 0$ ($a \neq 0$).

Nga pjesëtimi i zeros me një numër të plotë ($\neq 0$) merret si herës zero.

Meqenëse $1 \cdot 5 = 5$, kemi $5 : 1 = 5$.

Në përgjithësi $a : 1 = a$.

Meqenëse $(-1) \cdot 7 = -7$, kemi $(-7) : (-1) = 7$.

Në përgjithësi $a : (-1) = -a$.

Shembulli 1

Zgjidhni ekuacionin $(-3) \cdot x = -21$.

Zgjidhje

Sipas kuptimit të herësit, x është herësi i pjesëtimit të (-21) me (-3) , dmth $x = (-21) : (-3)$. Pra $x = 7$.

Shembulli 2

Zgjidhni ekuacionin $x : (-4) = -43$.

Zgjidhje

Sipas kuptimit të pjesëtimit, x është prodhimi i faktorëve (-4) dhe (-43) . Pra $x = (-4) \cdot (-43)$, d.m.th. $x = 172$.

Shembulli 3

Zgjidhni ekuacionin $30 : x = -6$.

Zgjidhje

Sipas kuptimit të pjesëtimit, 30 është prodhimi i faktorëve x dhe (-6) .

Pra $(-6) \cdot x = 30$, pra $x = 30 : (-6)$, d.m.th. $x = -5$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Cili nga barazimet e mëposhtme është i vërtetë?
a) $20 : 4 = 5$; b) $20 : (-4) = 5$; c) $(-20) : 4 = -5$; d) $(-20) : (-4) = -5$.
- Kryeni pjesëtimet:
a) $15 : 3$; b) $15 : (-3)$; c) $(-15) : 3$; d) $(-15) : (-3)$.
- Zgjidhni ekuacionet:
a) $(-7) \cdot x = -42$; b) $x : (-2) = 12$; c) $(-20) : x = -10$; d) $(-420) : x = 21$.
- Tregoni cili barazim nuk është i vërtetë.
a) $(-n) : 1 = -n$; b) $(-n) : (-1) = n$; c) $n : (-1) = n$; d) $(-n) : (-1) = -n$
-  Mira, që jeton në Toronto, i thotë në telefon shoqes së saj Zanës, që jeton në Gjakovë, se termometri shënon -28°C . Zana i thotë se në Gjakovë bën dy herë më pak ftohtë se në Toronto. Sa është temperatura në Gjakovë?

USHTRIME

- Kontrolloni saktësinë e barazimeve të mëposhtme nëpërmjet shumëzimit.
a) $(-21) : 3 = -7$; b) $90 : (-9) = -10$; c) $(-32) : (-8) = 4$; d) $0 : (-10) = 0$.
 - Kryeni pjesëtimet:
a) $-36 : 12$; b) $48 : (-3)$; c) $14 : (-1)$; d) $-50 : (-10)$.
 - Cilin numër duhet të vendosni në vend të x , që të merrni barazime të vërteta:
a) $x : 1 = -5$; b) $-31 : x = -31$; c) $-13 : x = 13$; d) $x : (-12) = 0$.
 - Cilin numër duhet ta shumëzoni me (-9) , që si prodhim të merrni.
a) -63 ; b) 144 ; c) 900 ; d) -72 .
 - Zgjidhni ekuacionet:
a) $23 \cdot x = -276$; b) $y \cdot (-21) = -315$; c) $-12 \cdot x = 252$; d) $y \cdot (-16) = -400$.
 - Plotësoni tabelën:
- | | | | | | | | | |
|---------|----|------|-----|-----|----|------|-----|----|
| a | 64 | -144 | -32 | -40 | 76 | -100 | -25 | 0 |
| b | -4 | -12 | 32 | -1 | -2 | 10 | -25 | -1 |
| $a : b$ | | | | | | | | |
- Herësi i pjesëtimit të numrit a me numrin b është c . Krahasoni c me zeron, nëse:
a) $a < 0$ dhe $b < 0$; b) $a < 0$ dhe $b > 0$; c) $a > 0$ dhe $b > 0$; d) $a > 0$ dhe $b < 0$.
 - Njehsoni:
a) $(-7 + 5 - 4) : 2$; b) $(3 - 11 + 2) : (-6)$; c) $(-10 - 20 - 30) : 12$.

3.4 Shprehje numerike me katër veprime me numra të plotë

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Kujtoni radhën e kryerjes së veprimeve në një shprehje me të katra veprimet, me dhe pa kllapa.

Kryeni veprimet:

a) $(26 - 76) : (24 - 14)$;

b) $(1 - 56) \cdot (1 - 12)$;

c) $(-81 + 23) : (8 - 60)$.

B Vrojttoni dhe mësoni

I. Nëse në një shprehje numerike me numra të plotë nuk ka kllapa dhe në të janë përdorur të katra veprimet aritmetike, atëherë në fillim kryhen veprimet e shumëzimit dhe të pjesëtimit, sipas radhës që janë shkruar; pastaj kryhen veprimet e mbledhjes e zbritjes, sipas radhës që janë shkruar.

Shembulli 1

$$\begin{aligned} 7 + 15 : (-3) - 3 \cdot (-4) + 400 : (-200) &= (\text{kryejmë pjesëtimit dhe shumëzimet}) \\ &= 7 + (-5) + 12 + (-2) = (\text{kryejmë mbledhjen dhe zbritjen, sipas radhës që janë shkruar}) \\ &= 2 + 12 + (-2) = \\ &= 14 + (-2) = 12. \end{aligned}$$

II. Nëse në një shprehje numerike me numra të plotë figurojnë të katra veprimet aritmetike dhe kllapa të tipave të ndryshëm, atëherë kryhen në fillim veprimet brenda kllapave, sipas radhës së përparësisë: rrumbullake, katrore, gjarpërore; më pas kryhen veprimet e shumëzimit dhe pjesëtimit; pastaj veprimet e mbledhjes dhe zbritjes, sipas radhës që janë shkruar.

Shembulli 2

$$\begin{aligned} (-2) \cdot \{14 - 2 \cdot [10 + 8 : (-2 + 6) \cdot (-3)]\} &= (\text{mbledhim brenda kllapës së vogël}) \\ &= (-2) \cdot \{14 - 2 \cdot [10 + 8 : (4) \cdot (-3)]\} = (\text{pjesëtojmë brenda kllapës së mesme}) \\ &= (-2) \cdot \{14 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot (-3)]\} = (\text{shumëzojmë brenda kllapës së mesme}) \\ &= (-2) \cdot \{14 - 2 \cdot [10 + (-6)]\} = (\text{mbledhim brenda kllapës së mesme}) \\ &= (-2) \cdot \{14 - 2 \cdot 4\} = (\text{shumëzojmë brenda kllapës gjarpërore}) \\ &= (-2) \cdot (14 - 8) = (-2) \cdot 6 = -12. \end{aligned}$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Njehsoni $25 + 2 \cdot (-5) - 24 : (-12) - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)$.
- Gjeni vlerën e shprehjeve numerike:
 - $7 + (-15) : (7 - 4) + (-3) \cdot (4 - 6)$;
 - $-3 \cdot \{21 - 2 \cdot [4 - (-8) : (-4)]\}$.
- Në njehsimin e vlerës së shprehjeve numerike të mëposhtme është bërë një gabim. Korrigjojeni atë, që barazimi të jetë i vërtetë.
 - $-7 + (-24) : (-8) = 10$;
 - $63 : (-3) - 15 : (-5) = 16$.



4. Në autobus kishte 30 udhëtarë. Në stacionin e parë hipën 11 udhëtarë dhe zbritën 6. Në stacionin e dytë hipën 5 udhëtarë dhe zbritën 10. Në stacionin e tretë hipën sa dyfishi i numrit të udhëtarëve që hipën në stacionin e dytë dhe zbritën sa gjysma e tyre. Sa udhëtarë arritën në stacionin e katërt? Shkruani një shprehje për zgjidhjen e problemit.



USHTRIME

- 1 Në radhën e veprimeve të shprehjes $15 - 2 \cdot 4 + 2$, Zana bëri një gabim.

$$\begin{aligned} 15 - 2 \cdot 4 + 2 &= \\ &= 15 - 8 + 2 = \\ &= 15 - 10 = \\ &= 5 \end{aligned}$$

Gjeni ku gaboi Zana.

- 2 Njihsoni:

a) $-20 : 4 - 9$; b) $5 + 11 \cdot (-4)$; c) $(-7 + 5) : (-1)$; d) $-27 : (-3) - 10$.

- 3 Gjeni vlerën e shprehjeve:

a) $-5 \cdot (-4) \cdot (-3) : 12$; b) $-125 : (2 - 27) \cdot (-10)$;
c) $12 \cdot (-5) : (-6) \cdot (-1)$; d) $(-800) : 40 \cdot (-5 + 9)$.

- 4 Vendosni në shprehjen $a \cdot b : c$ numrat e treguar dhe kryeni veprimet:

a) $a = -12, b = 8, c = -6$; b) $a = 24, b = -3, c = 9$; c) $a = -18, b = -3, c = -9$.

- 5 Dihet që $a = -90, b = -15, c = 3$. Gjeni vlerën e shprehjeve:

a) $a : b \cdot c$; b) $a : (b \cdot c)$; c) $a \cdot b : c$; d) $a \cdot (b : c)$.

- 6 Gjeni vlerën e shprehjeve numerike:

a) $[10 \cdot (-3) - 54 : (-9)] : 2 - [42 : (-7) - 3 \cdot (-8)] - (-4)$;
b) $[120 : (-4) + 50 \cdot [10 + 2 \cdot (-4)] \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2)]$.

- 7 Zgjidhni ekuacionet:

a) $(-3) \cdot (x + 2) = 36$; b) $25 : (1 - x) = -5$; c) $(x - 20) : 5 = (-4)$.



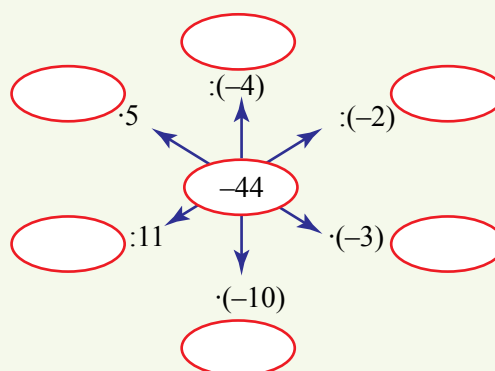
- 8 a) Një djalë nga fshati përdor ujin e mbledhur të shiut për disa nevoja të familjes së tij. Një ditë ai përdori nga ky ujë:
- 250 cl për të pastruar;
 - 12 000 cl për të ujitur kopshtin;
 - 150 l për të larë veturën.
- Sa l ujë ka harxhuar ai?
- b) Gjeni sa mm shi bien mesatarisht në vit në vendbanimin tuaj; sa l ujë bie mbi çatinë e shtëpisë suaj? Nëse grumbulloni ujin që rrjedh nëpërmjet ullikut, a do të mjaftonte për të plotësuar nevojat vjetore të familjes?

3.5 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar	Provoni të zgjidhni																																			
Dallimin e numrave të plotë (pozitivë dhe negativë).	1. Në tabelë paraqitet llogaria bankare e nënës së Agronit: <table><tr><th>Data</th><th>Përshkrimi</th><th>Dalja</th><th>Hyrja</th><th>gjendja</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>150 €</td></tr><tr><td>5 janar</td><td>Pagesa e sigurimeve</td><td>120 €</td><td></td><td>30 €</td></tr><tr><td>10 janar</td><td>Rroga</td><td></td><td>450 €</td><td>a</td></tr><tr><td>14 janar</td><td>Pagesa e kështit të kredisë</td><td>150 €</td><td></td><td>b</td></tr><tr><td>18 janar</td><td>Kthim borxhi</td><td></td><td>100 €</td><td>c</td></tr><tr><td>20 janar</td><td>Pagesa e hotelit</td><td>40 €</td><td></td><td>d</td></tr></table> Gjeni vlerat e panjohura a, b, c, d.	Data	Përshkrimi	Dalja	Hyrja	gjendja					150 €	5 janar	Pagesa e sigurimeve	120 €		30 €	10 janar	Rroga		450 €	a	14 janar	Pagesa e kështit të kredisë	150 €		b	18 janar	Kthim borxhi		100 €	c	20 janar	Pagesa e hotelit	40 €		d
Data	Përshkrimi	Dalja	Hyrja	gjendja																																
				150 €																																
5 janar	Pagesa e sigurimeve	120 €		30 €																																
10 janar	Rroga		450 €	a																																
14 janar	Pagesa e kështit të kredisë	150 €		b																																
18 janar	Kthim borxhi		100 €	c																																
20 janar	Pagesa e hotelit	40 €		d																																
Paraqitjen e numrave të plotë në drejtëzën numerike.	2. Në tabelën e mëposhtme jepen temperaturat mesatare në gradë celsius të një qyteti: <table><tr><th>Janar</th><th>Shkurt</th><th>Mars</th><th>Tetor</th><th>Nëntor</th><th>Dhjetor</th></tr><tr><td>-4</td><td>-2</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td></tr></table> Vendosni vlerat e temperaturave në boshtin numerik.	Janar	Shkurt	Mars	Tetor	Nëntor	Dhjetor	-4	-2	4	6	3	0																							
Janar	Shkurt	Mars	Tetor	Nëntor	Dhjetor																															
-4	-2	4	6	3	0																															
Krahasimin e numrave të plotë.	3. Renditni në rritje temperaturat e muajve të tabelës së mësipërme. 4. Renditni numrat e mëposhtëm nga më i vogli te më i madhi: a) -17; 23; 5; -9; -4. b) -8; -10; -6; 4; -2; 6.																																			
Njehsimin e shumës dhe ndryshimit të numrave të plotë.	5. Kryeni veprimet: a) $12 + (-18) + 23 = \dots$; c) $-29 + 34 - 50 = \dots$; b) $-11 - (-23) + (-2) = \dots$; d) $16 - (-21) - (-5) = \dots$ 6. Ditën e hënë, temperatura ishte -5°C. Ditën e martë ajo u rrit për 8°C. Sa ishte temperatura ditën e martë? 7. Në orën 20:00, temperatura ishte -3°C. Pas 4 orësh u ul për 3°C. Sa ishte temperatura në orën 24:00?																																			

Njehsimin e prodhimit dhe herësit të numrave të plotë.

8. Plotësoni diagramin e mëposhtëm:



Zbatimin e radhës së veprimeve aritmetike në shprehjet numerike.

9. Gjeni vlerën e shprehjes:

a) $12 - [13 - (-11)] + (-5 - 6) - 20$;

b) $(-15) + [(-5) + (-9) - (-4)]$.

10. Kryeni veprimet:

a) $-10 - (3 + 2) \cdot 4$;

b) $-8 - 4 \cdot 8 + 35$;

c) $-6 + 9 \cdot 2 : 3$.

Formimin e barazisë dhe jobarazisë, duke përdorur numra të plotë.

11. Shuma e dy numrave të plotë është -18 . Cilët mund të jenë këta numra?

Gjeni sa më shumë përgjigje që të mundeni. Krahasoni përgjigjet me ato të shokut/shoqes. Kush ka gjetur më shumë përgjigje?

Zgjidhjen e situatave problemore, duke përdorur kuptimin e numrit të plotë.

12. Në Prizren, gjatë një jave u regjistrua temperatura më e ulët e ditës:

E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte	E shtunë	E diel
-5°C	-7°C	-2°C	0°C	2°C	-1°C	-3°C

a) Për sa gradë celsius u ul temperatura nga e hëna në të martën?

b) Për sa gradë celsius ndryshoi temperatura nga e mërkura në të shtunën?

c) Cili është ndryshimi i temperaturës së ditës më të ftohtë me atë të ditës më të ngrohtë?

13. Merkuri i lëngshëm ngrin në temperaturën -39°C dhe vlon në temperaturën 357°C . Cili është ndryshimi i temperaturës ndërmjet dy gjendjeve?

3.6 Vlerësim**Koha: 45 minuta**

- 1** Duke përdorur numrat pozitivë ose negativë shprehni dy pohimet e mëposhtme:
 a) lartësia e majës së Gjeravicës është 2656 m;
 b) thellësia më e madhe e detit Adriatik është 1800 m. **(2 pikë)**
- 2** Pa ndërtuar boshtin numerik, tregoni cila nga pikat ndodhet më djathtas:
 a) -5 apo -7 ;
 b) -3 apo 3 . **(2 pikë)**
- 3** Një aeroplan fluturon në lartësinë 7500 metra mbi nivelin e detit. Një nëndetëse ndodhet në vijë të drejtë poshtë aeroplanit në thellësinë 60 metra. Sa metra larg nëndetësës është aeroplani? **(2 pikë)**
- 4** Krahasoni numrat:
 a) -9 dhe -13 ; b) -8 dhe 0 ; c) 1 dhe -100 . **(3 pikë)**
- 5** Shkruani të gjithë numrat e plotë:
 a) Më të mëdhenj se -7 dhe më të vegjël se 7 .
 b) Më të mëdhenj se -8 dhe më të vegjël se 1 . **(2 pikë)**
- 6** Gjeni shumat:
 a) $(-15) + (-6)$; b) $(+13) + (-13)$; c) $(+14) + (-6)$; d) $(3) + (-22)$. **(4 pikë)**
- 7** Gjeni ndryshimet:
 a) $(-13) - (-20)$; b) $-5 - (+12)$; c) $15 - (-4)$; d) $4 - (+10)$. **(2 pikë)**
- 8** Njihsoni:
 a) $-12 - (+8) + (-10)$; b) $20 - (-14) - (-15)$. **(2 pikë)**
- 9** Kryeni shumëzimet dhe pjesëtimet:
 a) $-7 \cdot (-3)$; b) $5 \cdot (-6)$; c) $-54 : (-6)$; d) $42 : (-7)$. **(4 pikë)**
- 10** Shkruani:
 a) numrin negativ treshifror më të vogël, me tri shifra të ndryshme;
 b) numrin negativ treshifror më të madh, me tri shifra të ndryshme. **(2 pikë)**
- 11** Njihsoni vlerën e shprehjes:
 $(2 - 6) \cdot \{13 - 2 \cdot [4 - 6 : (-3)] \cdot [2 - (-3)]\}$. **(2 pikë)**
- 12** Ditën e hënë, temperatura në Prishtinë ishte -3°C . Ditën e enjte ra për 3°C , ditën e shtunë u rrit për 9°C .
 a) Sa ishte temperatura ditën e enjte?
 b) Sa ishte temperatura ditën e shtunë?
 c) Sa ndryshoi temperatura nga dita e hënë në të shtunën? **(3 pikë)**

4

Numrat racionalë

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- dallon numrat racionalë (pozitivë dhe negativë);
- paraqet numrat racionalë në drejtëzën numerike;
- përcakton vlerën absolute të numrave me shenjë;
- krahason numrat racionalë;
- njehson shumën, ndryshimin, prodhimin dhe herësin e numrave racionalë;
- zbaton radhën e veprimeve aritmetike në shprehje numerike;
- përkufizon bashkësinë e numrave racionalë si bashkësi të mbyllur ndaj mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe pjesëtimit (në rastin kur pjesëtuesi nuk është zero);
- njehson vlerën e shprehjeve me numra racionalë;
- modelon dhe zgjidh barazime (barazi) dhe mosbarazime (jobarazi), duke përdorur numra racionalë.



Fjalë kyçe:

bashkësia e numrave racionalë, numër racional pozitiv, negativ, drejtëz numerike, vlerë absolute, shumë, ndryshim, prodhim, herës, shprehje aritmetike, radha e veprimeve.

A E DINI SE...?



Matematika nuk është vetëm për shkencëtarët. Ajo është për të gjithë ne. Kur shkojmë në shitore, kur lyejmë ose rregullojmë shtëpinë, kur gatujmë, kur dëgjojmë buletin meteorologjik, kur shkojmë në bankë, kur udhetojmë, ne përdorim vazhdimisht parimet dhe teknikat e matematikës. Gjatë shekujve, matematika është bërë një gjuhë universale që flitet nga

çdokush pavarësisht nga kultura, feja ose gjinia. Në shkencë, industri, tregti dhe në jetën e përditshme matematika na ndihmon të zgjidhim disa nga problemet më të vështira që hasim.

Çfarëdo të jeni duke zgjidhur, misteret e universit apo po llogarisni shpenzimet e familjes, një nga çelësat e suksesit është të dini të përdorni gjuhën e numrave.



4.1 Kuptimi i numrit racional

A Kërkoni dhe zbuloni

Shkruani disa numra të plotë, thyesorë, dhjetorë ose përqindje, si: -7 ; 0 ; 3 ; $-\frac{4}{7}$; $2,3$; $-2,3$; 45% . Kërkoni shokut/shoqes t'i paraqesë këta numra në trajtën e numrit thyesor $\frac{a}{n}$, ku a është numër i plotë, kurse n është numër natyror.

B Vrojtoni dhe mësoni

Thyesat, numrat dhjetorë apo përqindjet, si p.sh.: $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $2,5$; 7% , të cilat kthehen në numra thyesorë, quhen numra racionalë pozitivë dhe i shënojmë duke u vënë shenjën (+) (plus) përpara.

$$\frac{1}{2} = +\frac{1}{2}; \frac{5}{3} = +\frac{5}{3}; 2,5 = +2,5; 7\% = +7\%.$$

Duke vendosur para çdo thyese pozitive shenjën (-) (minus), merren thyesa që quhen numra racionalë **negativë**. Të tillë janë p.sh.: $-\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{3}$; $-2,5$; -7% .



Mbani mend:

Thyesat pozitive, thyestat negative dhe numri zero quhen **numra racionalë**. Bashkësia e numrave racionalë shënohet me shkronjën Q . Kështu, numri që paraqitet në trajtën $\frac{a}{n}$, ku a është numër i plotë, kurse n është numër natyror, quhet **numër racional**. Bashkësia e numrave racionalë është bashkësi e mbyllur ndaj mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe pjesëtimit (me pjesëtues të ndryshëm nga zero).

I kundërti i numrit racional r është numri racional $-r$.

Paraqitja e numrave racionalë në boshtin numerik

Në boshtin numerik, çdo numri racional i përgjigjet një pikë. Në figurën 4.1, A është pika që i përgjigjet numrit 2, kurse B është pika që i përgjigjet numrit -3 .

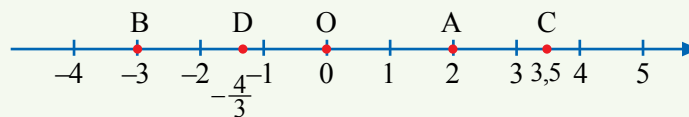


Fig. 4.1

Për të paraqitur në të numrin pozitiv 3,5, nga e djathta e O, e cila i përgjigjet numrit 0, duhet të vendosim një segment me gjatësi 3,5 njësi; gjejmë kështu pikën C. Për të paraqitur në bosht numrin negativ $-\frac{4}{3}$, duhet të vendosim në të majtë të O një segment me gjatësi $\frac{4}{3}$ njësi (ndahet njësia në 3 pjesë të barabarta dhe merren 4 pjesë të tilla), duke marrë pikën D.



Mbani mend:

Numrat e kundërt paraqiten në boshtin numerik me pika, të cilat janë simetrike ndaj origjinës O.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Paraqitni në boshtin numerik numrat racionalë:

4 dhe -4 ; $\frac{3}{2}$ dhe $-\frac{3}{2}$; 2,5 dhe $-2,5$. Çfarë vini re?

2. Rrethoni shënimin e gabuar.

a) $-8 \in \mathbb{Z}$; b) $-4 \notin \mathbb{N}$; c) $13 \notin \mathbb{Q}$; d) $1,3 \in \mathbb{Q}$.

3. Shkruani numrin e kundërt të: 6; -5 ; 0; $\frac{2}{3}$; $-1,5$; $\frac{a}{n}$.



4. Paraqitni me numra racionalë pozicionet e njëpasnjëshme të nëndetësës gjatë lëvizjes së saj. U nis nga niveli i detit; u zhyt në thellësinë 70,5 m; u ngrit në thellësinë 40,7 m; zbriti në fund të detit në thellësinë 120,3 m; u ngrit në sipërfaqe.

USHTRIME

1 Ndër numrat $\frac{3}{4}$; 1; -2 ; 0; $-\frac{7}{3}$; $2\frac{1}{2}$; 3,05; $-7,4$ tregoni ata që janë:

- a) numra pozitivë; b) numra negativë;
c) numra natyrorë; d) numra jo të plotë negativë.

2 Shkruani koordinatat e pikave të shënuara në figurën 4.2.

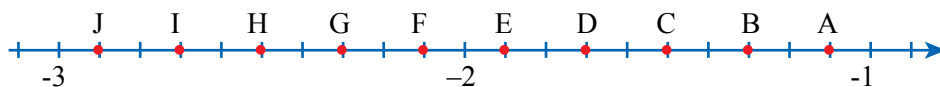


Fig. 4.2

3 Në figurën 4.3 janë shënuar pikat që paraqesin disa numra. Tregoni pikat që paraqesin numrat e kundërt.

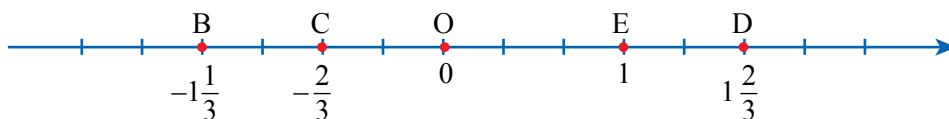


Fig. 4.3

4 Cila nga pikat e mëposhtme është më larg origjinës O?

- a) A (-18) dhe B (-80); b) A ($-3,03$) dhe B ($-2,97$);
c) A ($-0,5$) dhe B ($0,50$); d) A ($-\frac{5}{6}$) dhe N ($-\frac{8}{9}$).

5 Shkruani të gjithë numrat dhjetorë me një shifër pas presjes dhjetore, të cilët në boshtin numerik paraqiten me pika, që ndodhen ndërmjet pikave A dhe B.

- a) A ($2,5$) dhe B ($3,1$); b) A ($-10,9$) dhe B ($-9,9$).

6 Në boshtin numerik (fig. 4.4) janë paraqitur dy numra a , b .

- a) Cili prej tyre është pozitiv? Negativ?
b) Si mundemi, me anë të kompasit, të paraqesim në këtë figurë numrat $-a$, $-b$?



Fig. 4.4

7 Paraqitni në trajtën $\frac{a}{n}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) numrat e mëposhtëm:

$2\frac{5}{7}$; 4; 0,35; 0; $-2\frac{2}{3}$; $-3,18$; $-3\frac{8}{9}$.

4.2 Vlera absolute e numrit. Krahasoni i numrave racionalë

A Kërkoni dhe zbuloni

Vizatoni një bosht numerik. Kërkojini shokut/shoques të gjejë në të pikën që ndodhet 5 njësi larg origjinës së boshtit. Sa pika të tilla do të gjejë?

Në cilën anë të pikës O ndodhen pikat? Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Në boshtin numerik (fig. 4.5) janë shënuar pikat N, M, që u përgjigjen numrave -3 dhe 2 .

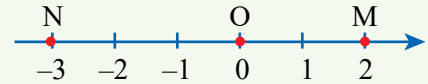


Fig. 4.5

Largesa e pikës N nga origjina është 3 njësi. Themë që vlera absolute e numrit -3 është 3. Largesa e pikës M nga origjina është 2 njësi. Themë që vlera absolute e numrit 2 është 2. Largesa e pikës O nga vetë pika O është 0 njësi. Themë që vlera absolute e numrit 0 (zero) është 0.



Mbani mend:

Vlerë absolute të një numri quajmë numrin që shpreh largesën nga origjina, të pikës përgjegjëse të tij, në boshtin numerik. Vlera absolute e numrit a shënohet $|a|$ dhe është gjithmonë numër jonegativ.

Kështu, $|-3| = 3$ dhe $|2| = 2$.



Punë në grup

Merrni në boshtin numerik numra pozitivë dhe negativë. Gjeni vlerat absolute. Çfarë vini re?

Krahasoni i numrave racionalë



Mbani mend:

Ndër dy numra racionalë, më i vogli është ai, që e ka pikën përgjegjëse të vendosur në të majtë të pikës përgjegjëse të tjetrit.

Duke parë figurën 4.1, mund të themi p.sh.: që:

$$-\frac{4}{3} < -1; \quad -\frac{4}{3} < 0; \quad 3,5 > 0; \quad -\frac{4}{3} < 3,5 \text{ etj.}$$

Shembull

Krahasoni numrat $-\frac{3}{4}$ dhe $-\frac{2}{3}$.

Zgjidhje

Gjejmë vlerën absolute të këtyre numrave. $|\frac{-3}{4}| = \frac{3}{4}$; $|\frac{-2}{3}| = \frac{2}{3}$. Le të krahasojmë tani thyesat $\frac{3}{4}$ dhe $\frac{2}{3}$. I kthejmë ato në thyesa me emërues të përbashkët. Emëruesi më i vogël i përbashkët është 12.

Kemi $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$; $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$. Meqenëse $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$, kemi $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. Duke shumëzuar me (-1) të dyja anët e mosbarazimit dhe duke ndryshuar kahun e mosbarazimit marrim:

$$-\frac{3}{4} < -\frac{2}{3}.$$

C Ushtroni duke zbatuar

- Gjeni vlerën absolute të numrave. Tregoni çfarë vini re:
 - $-1; -2; -3; -4$.
 - $1; 2; 3; 4$.
 - Janë dhënë numrat $-3,5; -2,5; -1,5; -0,5$.
 - Krahasoni numrat;
 - Gjeni dhe krahasoni vlerën absolute të tyre. Çfarë vini re?
 - Renditini numrat në rritje, duke përdorur mosbarazimin e dyfishtë.
 - $0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$.
 - $1,7; 0; -1,7$.
 - $2,5; -2,1; 0,5$.
 - $-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0$.
 - A është e vërtetë fjalia?
 - Nëse $a = b$, atëherë $|a| = |b|$.
 - Nëse $|a| = |b|$, atëherë $a = b$.
5. Dje, temperatura më e ulët ishte $-10,5^{\circ}\text{C}$; kurse sot është -12°C . Në cilën ditë ka bërë më ftohtë?

USHTRIME

- Gjeni vlerën absolute të numrave:
 - $-3,9$;
 - $-\frac{1}{2}$;
 - $3,13$;
 - $-3,13$.
- Midis cilëve numra të plotë të njëpasnjëshëm gjendet numri:
 - $-0,4$;
 - $-2\frac{1}{3}$;
 - $-101,2$;
 - $-57\frac{5}{7}$?
 Jepni përgjigjen, duke shkruar një mosbarazim të dyfishtë.
- Krahasoni:
 - $|3| + |7|$ me $|3 + 7|$;
 - $|-6| + |5|$ me $|(-6) + 5|$;
 - $|-1| + |10|$ me $|(-1) + 10|$.
 Çfarë vini re? Diskutoni.
- Renditini numrat në zbritje:
 - $-3\frac{1}{3}; -3; 6; 0; 2\frac{1}{2}; -9$.
 - $-0,3001; -0,31; -0,3301; -0,033331$.
- A ka vlera të x , për të cilat vërtetohet barazimi?
 - $|x| = 0$;
 - $|x| = 4$;
 - $|x| = -2$.
- Ketri qëndron në trungun vertikal të një peme, në pikën ku fillon një degë M (4), kurse qukapiku në pikën N (3), ku ka një zgavër. Sa është largesa midis tyre?



Në tabelë jepet sipërfaqja e disa komunave të Kosovës.

Komuna	Prishtinë	Prizren	Ferizaj	Pejë	Gjakovë	Gjilan
Sipërfaqja (km ²)	572	640	345	603	587	663

Renditni në rritje sipërfaqet e komunave.



4.3 Mbledhja dhe zbritja e numrave racionalë

A Kërkoni dhe zbuloni

Një e treta e nxënësve të shkollës luan volejboll, një e katërta luan futboll.

- Ç'pjesë e nxënësve luajnë futboll ose volejboll?
 - Nëse shkolla ka 240 nxënës, sa nxënës nuk luajnë futboll ose volejboll?
- Për secilin rast, shkruani një shprehje aritmetike dhe gjeni vlerën e saj.



B Vrojtoni dhe mësoni

Rregullat e mbledhjes së dy numrave racionalë, janë të njëjta me ato të mbledhjes së dy numrave të plotë. Veçse ato mund të formulohen pak më ndryshe, duke përdorur kuptimin e vlerës absolute.



Mbani mend:

Për të mbledhur dy numra racionalë negativë, veprojmë kështu:
Gjejmë dhe mbledhim vlerat absolute të tyre. Vendosim shenjën $(-)$ para numrit të gjetur.

Shembulli 1

$$(-3,7) + (-3,5) = ?$$

Vlerat absolute të numrave që mbledhen janë 3,7 dhe 3,5.

Kemi $3,7 + 3,5 = 7,2$. Atëherë $(-3,7) + (-3,5) = -7,2$.



Mbani mend:

Për të mbledhur dy numra racionalë me shenja të ndryshme, veprojmë kështu:
Gjejmë vlerat absolute të tyre dhe, nga vlera absolute më e madhe zbresim vlerën absolute më të vogël. Vendosim para numrit që gjetëm, shenjën e atij numri që ka vlerën absolute më të madhe.

Shembulli 2

$$\left(-\frac{4}{3}\right) + (+1) = ? \text{ Vlerat absolute të numrave që mbledhim janë } \frac{4}{3} \text{ dhe } 1. \text{ Kemi } \frac{4}{3} > 1.$$

$$\text{Bëjmë zbritjen } \frac{4}{3} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}. \text{ Atëherë } \left(-\frac{4}{3}\right) + (+1) = -\frac{1}{3}.$$

Mbledhja e dy numrave racionalë gëzon vetinë e ndërrimit dhe atë të shoqërimit.



Mbani mend:

Ndryshim të numrit racional a me numrin racional b quajmë numrin d , që po të mbledhet me b , jep a . Simbolikisht shënohet $d = a - b$. Sipas përkufizimit $d + b = a$.

Të njëjtën rregull që përdoret për të zbritur dy numra të plotë do të përdorim edhe për zbritjen e numrave racionalë. Për të gjetur ndryshimin e numrit racional a nga numri racional b , mjafton të gjejmë shumën e a me të kundërtin e b .

Pra, $a - b = a + (-b)$.

Shembulli 3

$$\left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right).$$

Kemi për të mbledhur dy numra me shenja të ndryshme. Vlerat absolute të numrave

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \text{ dhe } \left(+\frac{3}{4}\right) \text{ janë } - \text{ dhe } \frac{3}{4}.$$

Të kthyer në emëruesin e përbashkët ata janë $\frac{16}{20}$ dhe $\frac{15}{20}$. Kemi $\frac{16}{20} > \frac{15}{20}$.

$$\text{Gjejmë } \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20}. \text{ Atëherë } \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{20}.$$

C Ushtroni duke zbatuar

1. Njehsoni shumat:

$$\text{a) } \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right); \quad \text{b) } \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right); \quad \text{c) } \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right).$$

2. Njehsoni ndryshimet:

$$\text{a) } (3,4) - (-2,5); \quad \text{b) } \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right); \quad \text{c) } -3,8 + 17,15 - 6,2 - 6,15.$$

-  3. Agimi kishte në llogarinë e tij bankare 150 euro. Ai tërhoqi 70,50 euro, pastaj depozitoi 26,50 euro, pastaj tërhoqi 200 euro dhe më pas depozitoi 100 euro. Sa euro ka tani në llogarinë e tij?

USHTRIME

1 Kryeni veprimet:

$$\text{a) } \frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right); \quad \text{b) } (-1,7) - (0,8); \quad \text{c) } \left(-\frac{2}{15}\right) - \left(-\frac{3}{10}\right); \quad \text{d) } (-0,8) + (-0,3).$$

2 Gjeni shumat:

$$\text{a) } \left(-\frac{1}{2}\right) + (-5); \quad \text{b) } (-7) + \left(-\frac{2}{3}\right); \quad \text{c) } \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right); \quad \text{d) } \left(-1\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right).$$

3 Zgjidhni ekuacionet:

$$\text{a) } -6 + x = -8; \quad \text{b) } -6,5 + x = -10,5; \quad \text{c) } x + (-3,9) = -13,9; \quad \text{d) } -0,2 + x = -0,4.$$

4 Vendosni në shprehjen $a - b + c$, numrat e dhënë dhe gjeni vlerën e saj.

$$\text{a) } a = 0; \quad b = 20,7; \quad c = -10,3. \quad \text{b) } a = -1,2; \quad b = 5,5; \quad c = -2,5.$$

5 Arën me syprinë 2,4 ha, e ndanë në dy pjesë. Gjeni syprinën e çdo pjese, nëse njëra pjesë ka 0,8 ha më pak se tjetra.

6 Nga një qytet, në të njëjtin drejtim dhe njëkohësisht, u nisën dy çiklistë me shpejtësi 18,5 km/orë dhe 20,7 km/orë. Sa do të jetë largesa midis tyre pas 0,75 orë, nëse supozojmë se ato bëjnë lëvizje drejtvizore?



Ndërtesa më e lartë në tokë ndodhet në Dubai, Burj Khalifa, me lartësi 828 m. Pika më e thellë e oqeanit Indian është 3890 m. Gjeni ndryshimin midis këtyre dy vlerave.

4.4 Shumëzimi dhe pjesëtimi i dy numrave racionalë

A Kërkoni dhe zbuloni

Dihet që $2,8 \cdot 3,5 = 9,8$. Si mund të gjeni vlerën e shprehjeve të mëposhtme?

- a) $-2,8 \cdot 3,5$;
- b) $-(-2,8 \cdot 3,5)$;
- c) $-(-2,8) \cdot (-3,5)$.

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Për të kryer shumëzimin dhe pjesëtimin e dy numrave racionalë, do të përdorim po ato rregulla, si për numrat e plotë.



Mbani mend:

Prodhi i dy numrave racionalë, që kanë shenja të njëjta, është pozitiv.

Prodhi i dy numrave racionalë, që kanë shenja të ndryshme, është negativ.

Vlera absolute e prodhimit është i barabartë me prodhimin e vlerave absolute të faktorëve.

Shembulli 1

$$\text{a) } (-2,5) \cdot (-4) = +(2,5) \cdot 4 = +10; \quad \text{b) } \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}.$$

Shumëzimi i numrave racionalë ka po ato veti, që ka edhe shumëzimi i numrave të plotë: vetinë e ndërrimit, vetinë e shoqërimit, vetinë distributive (shpërndarëse) në lidhje me mbledhjen dhe në lidhje me zbritjen.

Veç kësaj, për çdo numër racional $\frac{a}{n}$, kemi: $\frac{a}{n} \cdot 0 = 0$; $\frac{a}{n} \cdot 1 = \frac{a}{n}$; $\frac{a}{n} \cdot (-1) = -\frac{a}{n}$.

Shembulli 2

Njehsoni me dy mënyra: $4,5 \cdot (2,1 - 3,1)$.

I. Gjejmë në fillim $2,1 - 3,1 = -1$. Atëherë kemi $4,5 \cdot (-1) = -4,5$.

II. Duke përdorur vetinë distributive kemi:

$$4,5 \cdot (2,1 - 3,1) = 4,5 \cdot 2,1 - 4,5 \cdot 3,1 = 9,45 - 13,95 = -4,5.$$



Mbani mend:

Herësi i pjesëtimit të dy numrave racionalë që kanë shenja të njëjta, është pozitiv.

Herësi i pjesëtimit të dy numrave racionalë që kanë shenja të ndryshme, është negativ.

Vlera absolute e herësit është e barabartë me herësin e vlerave absolute të të pjesëtueshmit dhe të pjesëtuesit.

Shembulli 3

$$\text{a) } \left(-\frac{8}{9}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = +\left(\frac{8}{9}\right) : \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}; \quad \text{b) } \left(-\frac{8}{9}\right) : \left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{8}{9}\right) : \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}.$$

» Vini re!

Thyesat racionale mund t'i shkruajmë në mënyra të ndryshme.

Për shembull, le të shohim herësit: $(-5) : 6$ dhe $5 : (-6)$. Secili prej tyre është i barabartë me numrin negativ $-\frac{5}{6}$. Nga ana tjetër, secili nga këta herësa mund të shkruhet, duke përdorur vijën e thyesës. $(-5) : 6 = \frac{-5}{6}$ dhe $5 : (-6) = \frac{5}{-6}$. Kështu, $-\frac{5}{6} = \frac{-5}{6} = \frac{5}{-6}$.



Mbani mend:

Gjatë shkrimit të thyesave negative, shenjën $(-)$ (minus) mund ta vendosim para thyesës, ose ta fusim në numërues apo në emërues.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Gjeni prodhimet:

a) $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{15}$;

b) $\left(-\frac{6}{7}\right) \cdot \left(-\frac{14}{15}\right)$;

c) $\left(-\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{14}{15}$.

2. Gjeni herësit:

a) $(-2,25) : (-1,5)$;

b) $(-2,25) : (1,5)$;

c) $(2,25) : (-1,5)$.

3. Tregoni nëse tri thyesat janë të barabarta:

a) $-\frac{2}{7}; \frac{2}{-7}; \frac{-2}{7}$;

b) $-\frac{3}{4}; \frac{-3}{4}; \frac{-3}{-4}$;

c) $\frac{-2}{-5}; \frac{2}{5}; -\frac{2}{5}$.



4. Temperatura në mesnatë ishte -2°C . Në secilën nga tri orët në vazhdim ajo u ul me $-0,5^{\circ}\text{C}$. Sa ishte temperatura në orën 3:00?



USHTRIME

1 Njihsoni:

a) $-\frac{1}{3} \cdot 2$;

b) $\frac{2}{5} \cdot (-7)$;

c) $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot (-2)$;

d) $-\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$.

2 Gjeni vlerën e x , që të kemi barazim të vërtetë:

a) $(-8) \cdot x = -0,8$;

b) $3 \cdot x = -9,3$;

c) $x \cdot (-5,7) = 5,7$;

d) $x \cdot (-8,9) = -8,9$.

3 Njihsoni:

a) $-\frac{4}{9} : 4$;

b) $-\frac{3}{8} : (-3)$;

c) $(-1) : \left(-\frac{2}{3}\right)$;

d) $1 : \left(-\frac{5}{7}\right)$.

4 Kryeni veprimet:

a) $12,6 : (-4)$;

b) $-5 : (-2,5)$;

c) $1 : (-2,5)$;

d) $-14,4 : 1,2$.

5 Njihsoni:

a) $\frac{-1,5 + (-1)}{-1,5 - (-1)}$;

b) $\frac{15 - (-3,5)}{1,5 + (-3,5)}$;

c) $\frac{-2,5 + 0,4}{-2,5 \cdot 0,4}$;

d) $\frac{-0,5 - 0,4}{-0,5 \cdot 0,4}$.

6 Të mërkurën, në magazinë sollën 4,8 tonë perime më shumë se të martën. Sa tonë perime janë sjellë për të dyja ditët, nëse të martën kanë sjellë 1,2 herë më pak se të mërkurën?

4.5 Shprehje aritmetike me numra racionalë

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Shkruani një shprehje me numra të plotë. Kërkojini shokut/shoqes të gjejë vlerën e shprehjes, duke treguar radhën e kryerjes së veprimeve. Po nëse shprehja përmban numra racionalë, cila është radha e kryerjes së veprimeve? Diskutoni.

B Vrojtani dhe mësoni

Shembulli 1

Njihsoni vlerën e shprehjes:

$$6,54 + 0,24 : (-0,8) - 2,1 \cdot (-4,2) + 14,4 : (-1,2).$$

Zgjidhje

Kjo shprehje numerike me numra racionalë nuk ka kllapa katrore dhe gjarpërore dhe në të figurojnë katër veprimet aritmetike. Prandaj në fillim kryejmë veprimet e shumëzimit dhe të pjesëtimit, sipas radhës në të cilën janë shkruar, dhe pastaj veprimet e mbledhjes dhe të zbritjes, sipas radhës në të cilën janë shkruar. Kemi:

$$\begin{aligned} 6,54 + 0,24 : (-0,8) - 2,1 \cdot (-4,2) + 14,4 : (-1,2) &= (\text{kryejmë pjesëtimet dhe shumëzimin}) \\ &= 6,54 + (-0,3) + 8,82 + (-12) = (\text{kryejmë mbledhjen dhe zbritjen, sipas radhës në të cilën janë shkruar}) \\ &= 6,24 + 8,82 - 12 = \\ &= 15,06 - 12 = 3,06. \end{aligned}$$

Shembulli 2

Njihsoni vlerën e shprehjes:

$$b) (-2,5) \cdot \left\{ \frac{52}{5} - 2 \cdot [7,4 + 8,1 : (-2 + \frac{11}{10}) \cdot (-4,7)] \right\}.$$

Zgjidhje

Në këtë shprehje numerike, me numra racionalë, figurojnë të katra veprimet aritmetike dhe kllapa të llojeve të ndryshme. Për këtë arsye kryejmë në fillim veprimet brenda kllapave, sipas radhës së përparësisë, të vogla (), të mesme [] dhe gjarpërushe { }. Më pas kryejmë veprimet e shumëzimit dhe të pjesëtimit. Pastaj kryejmë veprimet e mbledhjes dhe të zbritjes, sipas radhës në të cilën janë shkruar. Në shprehje ka numra thyesorë dhe numra dhjetorë. Në rastin kur numrat thyesorë kthehen në numra dhjetorë të fundmë, e kthejmë shprehjen në shprehje me numra dhjetorë dhe më pas vazhdojmë veprimet. Kemi:

$$\begin{aligned} (-2,5) \cdot \{ 10,4 - 2 \cdot [7,4 + 8,1 : (-2 + 1,1) \cdot (-4,7)] \} &= \\ = (-2,5) \cdot \{ 10,4 - 2 \cdot [7,4 + 8,1 : (-0,9) \cdot (-4,7)] \} &= \\ = -2,5 \cdot \{ 10,4 - 2 \cdot [7,4 + (-9) \cdot (-4,7)] \} &= \\ = -2,5 \cdot \{ 10,4 - 2 \cdot [7,4 + 42,3] \} &= \\ = -2,5 \cdot [10,4 - 2 \cdot 49,7] &= \\ = -2,5 \cdot (10,4 - 99,4) = -2,5 \cdot (-89) = +222,5 = 222,5. \end{aligned}$$

Shembulli 3

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{7} + 0,3 \cdot 4 - \left(0,6 - \frac{1}{2}\right) = (\text{kryejmë shumëzim}) \\
& = \frac{2}{7} + 1,2 - \left(0,6 - \frac{1}{2}\right) = (\text{kthejmë në numra thyesorë}) \\
& = \frac{2}{7} + \frac{12}{10} - \left(\frac{6}{10} - \frac{1}{2}\right) = (\text{kthejmë në thyesa me emërues të njëjtë, pasi thyesa } \frac{2}{7} \text{ nuk} \\
& \text{kthehet në numër dhjetor të fundmë; kryejmë veprimin brenda kllapave}) \\
& = \frac{20}{70} + \frac{84}{70} - \left(\frac{6}{10} - \frac{5}{10}\right) = \frac{20}{70} + \frac{84}{70} - \frac{1}{10} = \frac{20}{70} + \frac{84}{70} - \frac{7}{70} = \frac{97}{70}.
\end{aligned}$$

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni vlerën e shprehjeve numerike:

a) $4,7 + (-15,2) : (7,9 - 8,1) + (-3,6) \cdot (1,3 - 0,4)$.

b) $-0,1 \cdot \{20,3 - 2 \cdot [4,9 - (-8,4) : (-1,2)]\} - 0,5$.

2. Zgjidhni ekuacionet:

a) $(-0,7) \cdot x = 2,1$;

b) $x : (-2,3) = -4,2$;

c) $(-3,24) : x = 0,18$.

-  3. Në një kavanoz me mjaltë u shtua edhe 0,4 litra mjaltë dhe pastaj u hoqën 0,75 litra mjaltë. Më pas u shtuan 0,85 litra dhe në kavanoz u bënë 2 litra mjaltë. Sa mjaltë kishte në fillim në kavanoz?

USHTRIME

1 Gjeni vlerën e shprehjes:

$$15,5 + 2,4 \cdot (-5,2) - 2,25 : (1,5) - 6,1 \cdot (-0,2) \cdot (-3).$$

2 Vendosni në shprehjen $a \cdot (b : c)$ numrat e treguar dhe gjeni vlerën e saj.

a) $a = -10,5$; $b = 2,5$; $c = -0,05$.

b) $a = \frac{3}{4}$; $b = -\frac{4}{9}$; $c = -\frac{2}{3}$.

3 Dihet që $a = -6,4$; $b = -0,8$; $c = -0,02$. Gjeni vlerën e shprehjes:

a) $(a : b) \cdot c$;

b) $a : (b \cdot c)$;

c) $(a \cdot b) : c$;

d) $a \cdot (b : c)$.

4 Njehsoni me mënyrën më të përshtatshme:

a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{3}{4} + \frac{1}{7}$;

b) $0,4 \cdot (-7,6) \cdot 0,25$;

c) $-0,85 \cdot 0,3 - 0,85 \cdot 0,7$.

5 a) A mundet që ndryshimi i dy numrave të jetë më i madh se shuma e tyre?

b) A mund të jetë i vërtetë barazimi: $a - b = b - a$?

6 Pisha është 3,2 m më e lartë se bredhi. Sa është lartësia e pishës dhe ajo e bredhit, nëse dihet që:

a) pisha është 1,5 herë më e lartë se bredhi;

b) bredhi është 1,6 herë më i ulët se pisha.



7 Mali Everest është mali më i lartë i Himalajeve dhe maja e tij, vendi më i lartë i Tokës mbi sipërfaqen e detit, me lartësi 8848 metra. Oqeani Paqësor, me një thellësi maksimale prej 11 034 m, është oqeani më i thellë. Gjeni ndryshimin midis këtyre dy vlerave.

4.6 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

<i>Tashmë kemi mësuar</i>	<i>Provoni të zgjidhni</i>
Numrat racionalë, (pozitivë dhe negativë).	1. Shkruani pesë thyesa të ndryshme me emërues 5. 2. Shkruani tri thyesa të ndryshme me emërues -7 .
Paraqitjen e numrave racionalë në drejtëzën numerike;	3. Konstruktioni një bosht numerik. Gjeni në të vendndodhjen e numrave: -3 ; 0 ; 3 ; $-\frac{3}{2}$; 0 ; $\frac{3}{2}$; $-2,5$; 0 .
Vlerën absolute të numrave me shenjë.	4. Shkruani të gjithë numrat, që e kanë vlerën absolute: a) 25 ; b) $\frac{5}{9}$; c) 0 . 5. Për ç'vlera të a , është i vërtetë barazimi: a) $ a = -a $? b) $ a = - a $? 6. Gjeni vlerën e shprehjes: a) $ 10 : -5 $; b) $ -10 \cdot -5 $; c) $ 0,1 : -10 $.
Krahasimin e numrave racionalë.	7. Cilat shifra mund të vëmë në vend të x , që të merret mosbarazim i vërtetë: a) $-x5,44 > -25,44$; b) $-\frac{5}{7} < -\frac{x}{7}$; c) $-5x83 > -5183$; d) $-999,x > -999,1$. 8. Krahasoni numrat: a) $-\frac{1}{2}$ dhe -1 ; b) $-\frac{11}{7}$ dhe $-\frac{7}{12}$.
Gjetjen e shumës dhe ndryshimit të numrave racionalë.	9. Dihet që $a = -91,35$; $b = 80,24$; $c = -12,57$. Gjeni: a) $a - b + c$; b) $a - b - c$. 10. Dihet që $a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{5}{4}$; $c = -\frac{3}{4}$. Gjeni: a) $a - b + c$; b) $a + b - c$.

Gjetjen e prodhimit dhe herësit të numrave racionalë.	11. Shkruani herësin në trajtë thyese dhe pastaj bëni thjeshtimet e mundshme: a) $-2 : 3$; b) $-18 : 12$; c) $-12 : (-36)$. 12. Zgjidhni ekuacionin: a) $-8 \cdot x = 7,2$; b) $-4 : x = -0,4$; c) $0,6 \cdot y = -54$.
Radhën e kryerjes së veprimeve aritmetike në shprehje me numra racionalë.	13. Gjeni vlerën e shprehjes: $12,57 - [14,21 - (-10,38)] + (-4,01 - 2,56) - 20,11$. 14. Gjeni vlerën e thyesës: a) $\frac{1,2 - 3,1 + 0,8}{0,01}$; b) $\frac{-1,5 + 3,2 - 0,5}{-0,3}$.
Përkufizimin e bashkësisë së numrave racionalë si bashkësi të mbyllur ndaj mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe pjesëtimit (në rastin kur pjesëtuesi nuk është zero).	15. Plotësoni fjalitë. a) Shuma e dy ose më shumë numrave racionalë është gjithmonë numër _____. b) Ndryshimi i dy ose më shumë numrave racionalë është gjithmonë numër _____. c) Prodhi i dy ose më shumë numrave racionalë është gjithmonë numër _____. d) Herësi me pjesëtues të ndryshëm nga zero i dy numrave racionalë është gjithmonë numër _____.
Modelimin dhe zgjidhjen e barazimeve (barazive) dhe mosbarazimeve (jobarazive), duke përdorur numra racionalë.	16. Dihet që $x < 0$ dhe $y < 0$. Gjeni nëse numrat e mëposhtëm janë negativë ose pozitivë. a) $x \cdot y$; b) $(-x) \cdot (-y)$; c) $x + y$; d) $(-x) + (-y)$.
Zgjidhjen e situatave problemore duke përdorur kuptimin e numrit racional.	17. Nëse çiklisti ecën me shpejtësi 19,8 km/orë, sa rrugë (në km, në m) bën ai për 2,5 orë? 18. Muajin e parë, në fermë harxhuan $\frac{1}{6}$ e kashtës; muajin e dytë $\frac{1}{5}$ e mbetjes, kurse muajin e tretë $\frac{1}{4}$ e mbetjes së re. Pas kësaj, në fermë mbetën 30 kv (kuintalë) kashtë. Sa kv kashtë kishte në fillim në fermë?

4.7 Vlerësim**Koha: 45 minuta**

- 1** Jepen numrat: $\frac{4}{9}$; 90,1; -0,5; 0; -100; 3; $-7\frac{1}{6}$.

Tregoni se cilët prej tyre janë negativë.

(1 pikë)

- 2** Shkruani numrat e kundërt të: a) 18,3; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0.

(1 pikë)

- 3** Gjeni $|-27|$; $|\frac{7}{8}|$; $|0|$.

(2 pikë)

- 4** Krahasoni:

a) $-\frac{1}{2}$ dhe $-\frac{3}{4}$; b) -1,2 dhe -1,02; c) 0 dhe -3,5.

(3 pikë)

- 5** Shënoni në boshtin numerik pikën, që i përgjigjet numrit të kundërt të:

a) 3; b) -1,5

(2 pikë)

- 6** Kryeni veprimet:

a) $-0,8 - 2,3$; b) $0 - 10,3$; c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$; d) $-0,7 + 1$.

(4 pikë)

- 7** Kryeni veprimet;

a) $-5 \cdot (-0,6)$; b) $-6 \cdot \frac{2}{3}$; c) $8,1 : (-0,9)$; d) $-2,4 : (-0,6)$.

(4 pikë)

- 8** Gjeni vlerën e shprehjes:

a) $2,5 \cdot (-4) + 15$; b) $-12 \cdot (0,7 - 1,2)$.

(4 pikë)

- 9** Zgjidhni ekuacionin:

a) $-6,32 \cdot x = 60,04$; b) $y : (-3,08) = -4,5$.

(2 pikë)

- 10** Gjeni vlerën e shprehjes $(-2,4) \cdot (-1) + 3,5 \cdot [(-1,2) - 2 \cdot (0,5 - 0,9) : (-1,6)]$.

(3 pikë)

- 11** Kamioni peshon 2,4 tonë më shumë se vetura. Sa është pesha e secilit prej tyre, duke ditur që pesha e veturës përbën 60% të peshës së kamionit?

(3 pikë)

- 12** Është dhënë shprehja $12 - 14 + 5 - 10$.

a) Gjeni vlerën e saj.

b) Zëvendësoni secilin nga numrat në shprehje, me numrin e kundërt dhe gjeni vlerën e shprehjes së re. Çfarë vini re?

(3 pikë)

5

Gjeometria në rrafsh (2)

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- konstrukton disa nga shumëkëndëshat e rregullt;
- zbulon marrëdhëniet e këndeve të brendshme (shuma e tyre është 180°) dhe këndeve të jashtme (shuma e tyre është 360°) të trekëndëshit me metoda të ndryshme (p.sh.: duke renditur qoshet e letrës, duke përdorur këndmatësin etj.);
- njehson madhësitë e këndeve të trekëndëshit (të jashtme e të brendshme), kur dihen madhësitë e dy këndeve të tij;
- cakton shumën e këndeve të brendshme në shumëkëndësja dhe anasjellas, nga shuma e dhënë cakton shumëkëndëshin përkatës;
- cakton numrin e diagonaleve të një shumëkëndëshi;
- përshkruan, emërtan dhe klasifikon katërkëndëshat në bazë të pozitës së brinjëve (paralelogramet, trapezat, trapezoidët).



Fjalë kyçe:

shumëkëndësh, shumëkëndësh i rregullt, kënde të brendshme, kënde të jashtme, shumë të këndeve të brendshme (të jashtme), masa e këndit, diagonale e shumëkëndëshit, paralelogram, trapez, trapezoid (romb).

A E DINI SE...?



Është vënë re se forma më e qëndrueshme në natyrë është sipërfaqja trekëndore. Nëse keni një katror ose drejtkëndësh të formuar nga katër shufra metalike, ky mund të shndërrohet lehtësisht në paralelogram apo romboid. Kjo gjë nuk mund të ndodhë me një trekëndësh. Një figurë në formë trekëndore nuk mund të ndryshojë strukturën e saj. Kjo për arsye se çdo forcë që ushtrohet në të, përhapet në mënyrë të barabartë në të tria anët. Për këtë arsye, trekëndëshat mund t'i gjejmë gjithandej në botën që na rrethon: gjymtyrët e yllit të detit janë në formë trekëndore; rrjeta e merimangës përbëhet nga figura trekëndore; egjiptianët e lashtë i ndërtuan piramidat e tyre me atë formë; velat e anijes janë bërë në formën e trekëndëshit që t'i rezistojnë erës etj. Përdorimi i trekëndëshave në ura bëri që këto të jenë më të forta, sepse trekëndëshat e shpërndajnë në mënyrë të barabartë peshën, pa ndryshuar përmasat e tyre. Trekëndëshat janë mjete të përshtatshme për arkitekturën dhe përdoren në bazamentet e ndërtesave dhe strukturave të tjera, pasi ato sigurojnë forcë dhe qëndrueshmëri.



5.1 Shumëkëndëshat. Shumëkëndëshat e rregullt

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurë është dhënë një shumëkëndësh. Tregoni:

- llojin e shumëkëndëshit;
- brinjët dhe këndet e brendshme të tij;
- këndet e jashtme të tij.

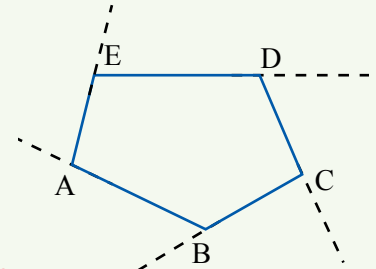


fig. 5.1

B Vrojtoni dhe mësoni

Vijë e thyer quhet vija e formuar nga unioni (bashkimi) i segmenteve të njëpasnjëshme. Një vijë e thyer mund të jetë **e hapur** (fig. 5.2/a) ose **e mbyllur** (fig. 5.2/b); ajo mund të presë veten (fig. 5.2/c).

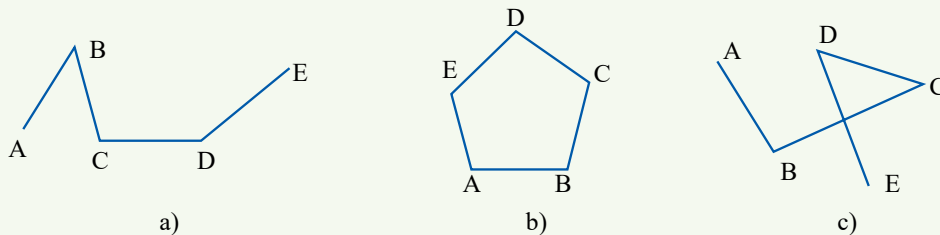


Fig. 5.2

Çdo vijë e thyer e mbyllur që nuk pret veten, e ndan rrafshin në dy pjesë: njëra e kufizuar dhe tjetra e pakufizuar.



Mbani mend:

Figura e formuar nga një vijë e thyer e mbyllur, që nuk pret veten, quhet shumëkëndësh. Figura e formuar nga një shumëkëndësh dhe nga pikat që ndodhen brenda saj (në pjesën e kufizuar) quhet sipërfaqe shumëkëndëshe.

Shumëkëndëshi i paraqitur në figurën 5.3 ka pesë **kulme** (që janë pikat A, B, C, D, E) dhe pesë **brinjë** (që janë segmentet [AB], [BC], [CD], [DE], [EA]); ai quhet **pesëkëndësh**.

Segmentet e vijës së thyer quhen **brinjë** të shumëkëndëshit; pika ku takohen dy brinjë quhet **kulm**.

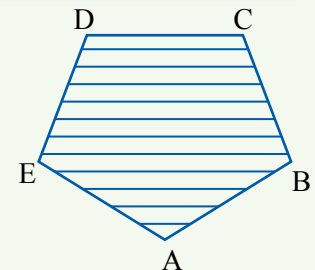


Fig. 5.3



Mbani mend:

Shuma e gjatësive të brinjëve të shumëkëndëshit quhet perimetër i shumëkëndëshit.

Perimetri i shumëkëndëshit të paraqitur në figurën 5.3 është:

$$P = AB + BC + CD + DE + EA$$

Në figurën 5.4/a, të gjitha drejtëzat, që kalojnë nëpër dy kulme të njëpasnjëshme të shumëkëndëshit, e lënë atë në njërën anë të tyre. Shumëkëndësha të tillë quhen **konveksë**.

Në figurën 5.4/b, njëra nga drejtëzat, që kalon nëpër dy kulme të njëpasnjëshme (DE), e ndan

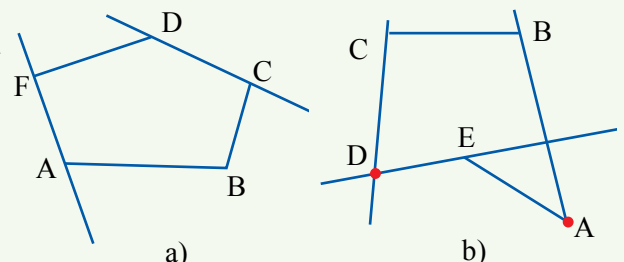


Fig. 5.4

Fig. 5.4

shumëkëndëshin në dy pjesë, që ndodhen në anë të ndryshme të saj. Shumëkëndësha të tillë quhen **konkavë**.

Ne do të shqyrtojmë kryesisht shumëkëndëshat konveksë.

Diagonale të shumëkëndëshit quhen segmentet që bashkojnë dy kulme jo të njëpasnjëshme të shumëkëndëshit. Në figurën 5.5, trekëndëshi ABC nuk ka diagonale, kurse katërkëndëshi (i mysët) ABCD ka dy diagonale: [AC] dhe [BD].

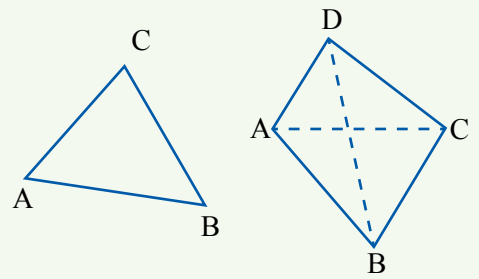


Fig. 5.5

Këndi i formuar nga dy brinjë të njëpasnjëshme dhe që përmbahet brenda shumëkëndëshit konveks, quhet **kënd i brendshëm** i shumëkëndëshit. Pesëkëndëshi ABCDE ka pesë kënde.

Këndi i përbrinjëshëm me një kënd të brendshëm të shumëkëndëshit konveks quhet **kënd i jashtëm** i shumëkëndëshit.

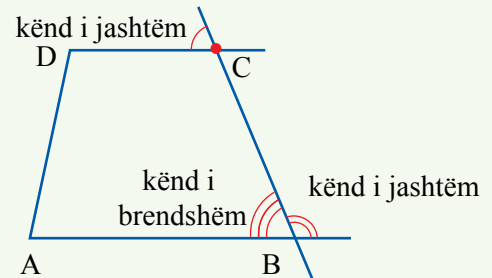


Fig. 5.6



Mbani mend:

Shumëkëndëshi quhet i rregullt, nëse ai i ka të gjitha brinjët të barabarta midis tyre dhe të gjitha këndet të barabarta midis tyre.

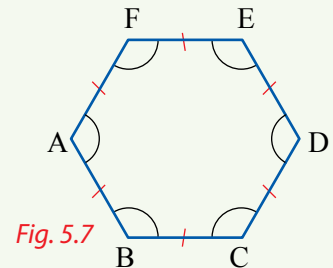


Fig. 5.7

C Ushtroni duke zbatuar

1. Në figurën 5.8 janë treguar dy shumëkëndësha. Matni gjatësitë e brinjëve. Cili prej tyre është i rregullt? Argumentoni.

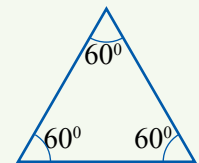


Fig. 5.8

2. Vizatoni, me anë të kompasit dhe të vizores, një katërkëndësh që dy brinjë i ka 2 cm të gjata dhe dy të tjerat i ka 4 cm të gjata.



3. Në mozaikun e paraqitur në figurën 5.9 dalloni shumëkëndëshat e rregullt. Ngjyros mozaikun.

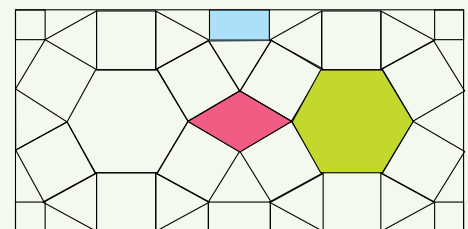


Fig. 5.9

USHTRIME

- 1 A janë të vërteta fjalitë e mëposhtme?
 - a) Numri më i vogël i brinjëve në një shumëkëndësh është tre.
 - b) Një katërkëndësh është gjithnjë konveks.
 - c) Numri i këndeve të jashtme të shumëkëndëshit është sa numri i brinjëve të tij.
- 2 Vizatoni një pesëkëndësh konveks. Tregoni të gjitha këndet e jashtme të tij.
- 3 Vizatoni një katërkëndësh që të ketë:
 - a) brinjë të barabarta, por kënde jo të barabarta.
 - b) kënde të barabarta, por brinjë jo të barabarta.
- 4 Perimetri i një pesëkëndëshi është 25 m; gjatësitë e brinjëve të tij janë numra të plotë të njëpasnjëshëm. Gjeni gjatësitë e brinjëve.

5.2 Konstruktimi i shumëkëndëshave të rregullt

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Konstruktioni me kompas dhe vizore trekëndëshin barabrinjës.

Konstruktioni me kompas dhe vizore katrorin me brinjë të dhënë 5 cm.

Argumentoni veprimet.

B Vrojtoni dhe mësoni

Konstruktimi i gjashtëkëndëshit të rregullt.

Mënyra I

Ndërtojmë një rreth me qendër O . Duke u nisur nga një pikë A e rrethit, presim në mënyrë të njëpasnjëshme harqe me rreze sa rrezja e rrethit. Merren kështu, njëra pas tjetrës, pikat B, C, D, E, F . Duke i bashkuar ato me segmente të njëpasnjëshme, merret gjashtëkëndëshi i rregullt $ABCDEF$. Brinja e tij është sa rrezja e rrethit. Nëse bashkojmë pikën O me pikën A dhe B , trekëndëshi AOB është trekëndësh barabrinjës nga vetë konstruktimi që bëmë: $AB = AO = BO$, me rrezen e vetë rrethit.

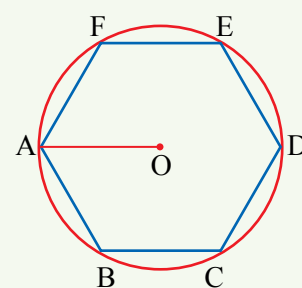
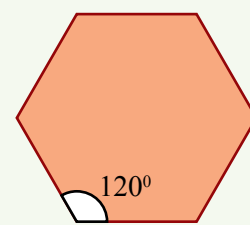


Fig. 5.10

Mënyra II

Të gjitha këndet e brendshme të gjashtëkëndëshit të rregullt kanë masë të barabartë me 120° . Ne mund ta përdorim këtë veti, për të vizatuar një gjashtëkëndësh të rregullt.



këndi i brendshëm i gjashtëkëndëshit të rregullt

Fig. 5.11

Shembull

Konstruktioni një gjashtëkëndësh të rregullt me brinjë 7 cm.

Zgjidhje

- Vizatoni një segment horizontal me gjatësi 7 cm.
- Me këndmatësin tuaj, konstruktioni kënde me masë 120° në të dyja anët e segmentit.
- Te krahët e këtyre këndeve, caktoni segmente me gjatësi 7 cm.
- Rrotullojeni fletën tuaj dhe përsëriteni këtë veprim për secilën brinjë, derisa të keni konstruktuar një gjashtëkëndësh të rregullt.

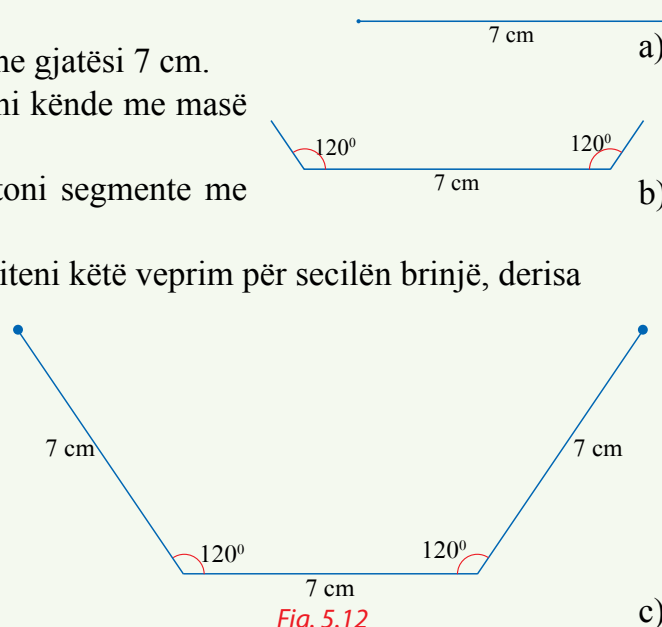


Fig. 5.12

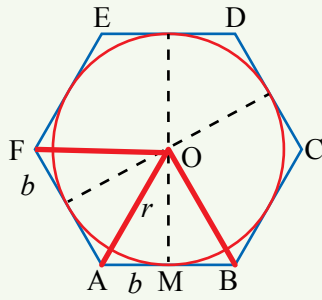


Fig. 5.13

Punë në grup

Vrojtoni gjashtëkëndëshin ABCDEF. Gjeni mesin M të segmentit [AB].
Konstruktoni rrethin me qendër në O dhe rreze [OM].
Çfarë vëreni?

Rrezja e këtij rrethi paraqet largesën e qendrës O nga cilado brinjë e shumëkëndëshit të rregullt. Rrethi i tillë quhet rreth i brendashkruar në shumëkëndësh.



Mbani mend:

Në çdo shumëkëndësh të rregullt mund të brendashkruhet dhe të jashtëshkruhet një rreth.

Punë në grup

Konstruktoni një trekëndësh barabrinjës me ndihmën e vizores dhe të kompasit.
Konstruktoni një katror me ndihmën e vizores dhe të kompasit.
Argumentoni veprimet.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Duke përdorur vizoren dhe këndmatësin, konstruktoni një tetëkëndësh të rregullt me brinjë 6 cm (këndi i brendshëm i tetëkëndëshit të rregullt është 135°).
- Përzgjidhni një nga shumëkëndëshat e rregullt. Skiconi shtrimin e një sipërfaqeje dhome me llojin e shumëkëndëshit që keni përzgjedhur.

USHTRIME

- Duke përdorur vizoren dhe këndmatësin, konstruktoni një trekëndësh barabrinjës me brinjë 4 cm.
- Duke përdorur vizoren dhe këndmatësin, konstruktoni një katror me brinjë 4 cm. Konstruktoni një rreth të brendashkruar dhe të jashtëshkruar ndaj katrorit.
- Duke përdorur vizoren dhe këndmatësin, konstruktoni një shumëkëndësh të rregullt me brinjë 7 cm dhe kënd të brendshëm 108° . Si emërtohet ky shumëkëndësh?
- Duke i ndarë në dy gjysma simetrike, palosni pesëkëndëshin, gjashtëkëndëshin dhe tetëkëndëshin e rregullt. Sa herë mund ta bëni këtë për secilën figurë?
- Vendosni pesëkëndëshin e rregullt në një pozicion çfarëdo mbi fletoren tuaj. Rrotullojeni rreth vetes, në mënyrë që të vijë në pozicionin fillestar. Sa herë mund ta bëni këtë? Përsëriteni këtë veprim për gjashtëkëndëshin dhe tetëkëndëshin.
- Përsëritni kërkesat e ushtrimeve 4 dhe 5 edhe për trekëndëshin barabrinjës.
- Në pesëkëndëshin, gjashtëkëndëshin dhe tetëkëndëshin tuaj të rregullt, matni këndet. Plotësoni pohimet e mëposhtme duke vendosur vlerën e saktë.
 - Shuma e masave të këndeve të pesëkëndëshit të rregullt është ____ shkallë.
 - Shuma e masave të këndeve të gjashtëkëndëshit të rregullt është ____ shkallë.
 - Shuma e masave të këndeve të tetëkëndëshit të rregullt është ____ shkallë.

5.3 Trekëndëshi. Shuma e këndeve të brendshme në trekëndësh

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Vizatoni lloje të ndryshme trekëndëshash. Emërtojini ato. Tregoni llojin e trekëndëshit sipas brinjëve dhe sipas këndeve. Dalloni këndet e brendshme dhe të jashtme të trekëndëshave. Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Trekëndësh quhet shumëkëndëshi që ka tri brinjë.

Veti të trekëndëshit (të pranuar pa vërtetim) janë:

- në çdo trekëndësh, shuma e gjatësive të dy brinjëve është më e madhe se gjatësia e brinjës së tretë, ndërsa ndryshimi i gjatësive të çdo dy brinjëve është më e vogël se gjatësia e brinjës së tretë;
- në çdo trekëndësh, përballë me gjatësinë më të madhe ndodhet këndi më i madh dhe përballë këndit më të madh ndodhet brinja më e gjatë e tij.



Punë në grup

- Me vizore dhe laps, vizatoni një trekëndësh në një fletë. Priteni me kujdes.
- Ngjyrosni secilin kënd me ngjyra të ndryshme. Pritini këndet sipas vijës së ndërprerë.
- Vendosini me kujdes këndet pranë njëri-tjetrit.
- Çfarë këndi formohet me këto tri kënde?

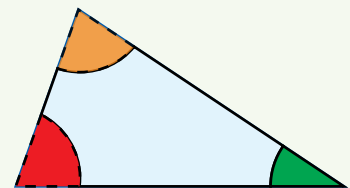


Fig. 5.14

Shembull

Vërtetoni që shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshit është 180° .

Zgjidhje

Le të kemi trekëndëshin ABC dhe shënojmë me $\angle 1$, $\angle 2$, dhe $\angle 3$ këndet e brendshme të tij.

Nëpër pikën A tërheqim drejtëzën d paralele me brinjën (BC).

Shqyrtojmë tri këndet $\angle 4$, $\angle 3$, dhe $\angle 5$ që e kanë kulmin në pikën A. Të tri këndet formojnë një kënd të shtrirë, pra $m(\angle 4) + m(\angle 3) + m(\angle 5) = 180^\circ$.

Por, këndet $\angle 1$ dhe $\angle 4$ janë kongruente, sepse janë kënde shndërruese të brendshme, të formuara nga dy drejtëza paralele d dhe (BC) me prerësen (AB).

Prandaj $m(\angle 4) = m(\angle 1)$.

Po kështu këndet $\angle 2$ dhe $\angle 5$ janë kënde kongruente, sepse janë kënde shndërrues të brendshme, të formuara nga drejtëzat paralele d dhe (BC) me prerësen (AC). Prandaj $m(\angle 5) = m(\angle 2)$. Duke zëvendësuar $m(\angle 4)$ dhe $m(\angle 5)$ në barazimin e mësipërm, marrim $m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) = 180^\circ$, që është ajo çka donim të vërtetonim.

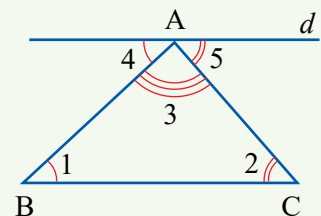


Fig. 5.15

**Mbani mend:**

Shuma e masave të këndeve të brendshme të trekëndëshit është 180° .

C Ushtroni duke zbatuar

- Në një trekëndësh kënddrejtë, masa e një këndi të ngushtë është 35° . Sa është masa e këndit tjetër të ngushtë?
- A ekziston trekëndësh, brinjët e të cilit të jenë:
 - 2 cm, 3 cm, 4 cm;
 - 2 cm, 2 cm, 4 cm;
 - 2 cm, 3 cm, 6 cm?
- Në figurën 5.16, trekëndëshi ABC është dybrinjënjëshëm ($AB = AC$) dhe $[PQ] \parallel [BC]$. Gjeni masat e këndeve x dhe y .
- Skiconi shtrimin e sipërfaqes së një dhome me pllaka në formë trekëndëshi.

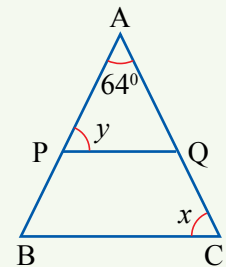


Fig. 5.16

USHTRIME

- A janë të vërteta fjalitë e mëposhtme?
 - Një trekëndësh mund të ketë dy kënde të drejta.
 - Një trekëndësh mund të ketë vetëm një kënd të ngushtë.
 - Këndet e ngushta të një trekëndëshi kënddrejtë janë komplementare (plotësuese)?
- Gjeni masën e këndit të tretë të trekëndëshit, kur masat e dy këndeve të tjera të tij janë:
 - 45° dhe 60° ;
 - 45° dhe 90° ;
 - 120° dhe 30° .
- Në trekëndëshin ABC me perimetër 52 cm, kemi $AB + BC = 34$ cm dhe $AB + AC = 38$ cm. Gjeni gjatësitë e brinjëve.
- Në një trekëndësh kënddrejtë, ndryshimi midis këndeve të ngushta është 20° . Gjeni masat e këtyre këndeve.
- Në një trekëndësh, masa e njërit kënd është sa dyfishi i masës së një tjetri dhe masa e këndit të tretë është sa shuma e masave të dy të tjerëve. Gjeni masat e këndeve të trekëndëshit.
- Gjeni masat e këndeve x , y , z në figurën 5.17.

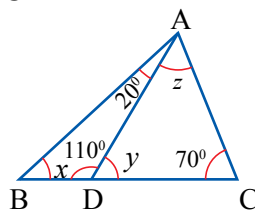


Fig. 5.17

- Masa e këndit $\angle A$ në trekëndëshin ABC është 102° dhe këndi $\angle B$ është sa dyfishi i këndit $\angle C$. Gjeni masat e këndeve të trekëndëshit.

5.4 Këndet e jashtme të trekëndëshit

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 5.18 është paraqitur trekëndëshi ABC. Në zgjatimin e brinjës AB të tij është marrë pika D. Jepen $m(\angle CAB) = 35^\circ$ dhe $m(\angle ACD) = 70^\circ$. Gjeni masën e këndit $\angle CBD$.

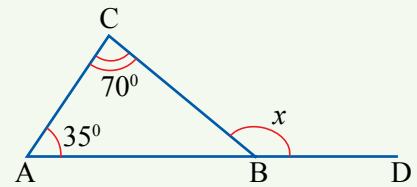


Fig. 5.18

B Vrojtoni dhe mësoni

Në figurën 5.19 është paraqitur trekëndëshi ABC. Në zgjatimin e brinjës BA të tij është marrë pika E. Këndi $\angle CAE$, me kulm në kulmin A të trekëndëshit ka si krahë njëren brinjë të trekëndëshit dhe zgjatimin e një brinje tjetër të trekëndëshit. Ky quhet **kënd i jashtëm i trekëndëshit**.

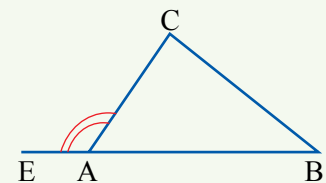


Fig. 5.19



Mbani mend:

Këndi i përbrinjëshëm me njërin nga këndet e trekëndëshit quhet kënd i jashtëm i trekëndëshit.

Në çdo kulm të trekëndëshit mund të ndërtohen dy kënde të jashtme të tij, që janë kryqëzuese.

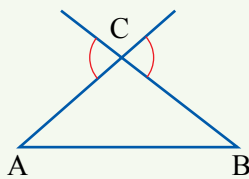


Fig. 5.20

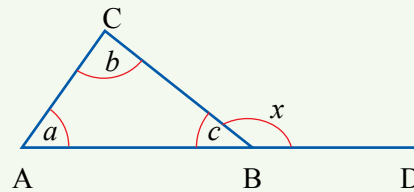


Fig. 5.21

Shqyrtojmë trekëndëshin ABC, masat e këndeve të brendshme të të cilit janë a , b , c . Shënojmë me x masën e këndit të jashtëm $\angle CBD$ të tij.

Kemi $c + x = 180^\circ$, si kënde të përbrinjëshme. Prej ku del $x = 180^\circ - c$.

Kemi $a + b + c = 180^\circ$, si kënde të brendshme të trekëndëshit.

Prej ku del $a + b = 180^\circ - c$.

Kur dy madhësi janë të barabarta me një të tretë, atëherë ato janë të barabarta edhe ndërmjet tyre. Nga barazimet e mësipërme rrjedh që $x = a + b$.



Mbani mend:

Këndi i jashtëm i trekëndëshit është sa shuma e dy këndeve të brendshme jo fqinjë me të.

Shembulli 1

Në figurën 5.22 është dhënë trekëndëshi kënddrejtë ABC, në të cilin këndi i ngushtë $\angle CAB$ e ka masën 65° .

Masa e këndit të jashtëm me kulm B është $90^\circ + 65^\circ = 155^\circ$.

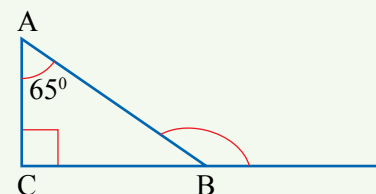


Fig. 5.22

Shembulli 2

Në figurën 5.23, krahas secilit prej këndeve të brendshme a, b, c të trekëndëshit ABC, janë shënuar edhe këndet e jashtme përgjegjëse $\alpha; \beta; \gamma$.

Për secilin nga këndet e jashtme shkruajmë $\alpha = 180^\circ - a$; $\beta = 180^\circ - b$; $\gamma = 180^\circ - c$. Prej këtu del $\alpha + \beta + \gamma = (180^\circ - a) + (180^\circ - b) + (180^\circ - c)$

D.m.th. $\alpha + \beta + \gamma = 540^\circ - (a + b + c) = 540^\circ - 180^\circ$ (pse?).

Si përfundim $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.

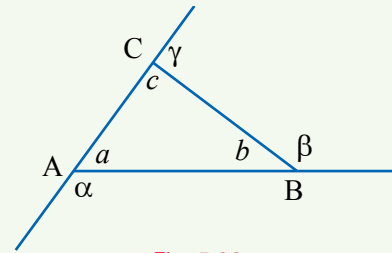


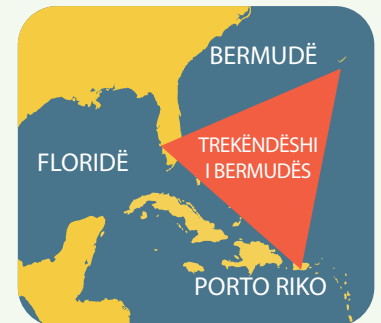
Fig. 5.23

**Mbani mend:**

Shuma e masave të këndeve të jashtme të trekëndëshit është 360° .

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni këndin e jashtëm të trekëndëshit barabrinjës.
2. Gjeni tri këndet e jashtme të trekëndëshit kënddrejtë barakrahës.
3. Kryeni matjet e nevojshme për të gjetur këndet e brendshme dhe të jashtme të trekëndëshit të Bermudës.

**USHTRIME**

1. Njëri kënd i trekëndëshit kënddrejtë është 34° . Gjeni masat e tri këndeve të jashtme të trekëndëshit.
2. Në trekëndëshin barakrahës, këndi përballë bazës është 50° . Gjeni masën e këndit të jashtëm në njërin nga kulmet e bazës.
3. Në trekëndëshin barakrahës masa e këndit në bazë është 46° . Gjeni masën e këndit të jashtëm në kulmin përballë bazës së trekëndëshit.
4. Njëri kënd i trekëndëshit është 45° , kurse njëri nga dy këndet e tjera është dy herë më i madh se këndi i tretë.
 - a) Gjeni masat e këndeve të trekëndëshit.
 - b) Gjeni këndin e jashtëm, fqinj me këndin më të vogël.
5. Këndi në kulm përballë bazës së trekëndëshit barakrahës është 3 herë më i madh se këndi në bazën e tij. Gjeni këndet e brendshme dhe këndet e jashtme të trekëndëshit.
6. Masat e këndeve të brendshme të një trekëndëshi formojnë raportet $1 : 2 : 3$. Gjeni masat e këndeve të jashtme të trekëndëshit.
7. A mund të ndodhë që një kënd i jashtëm i trekëndëshit të jetë i barabartë me një kënd të brendshëm të tij?

5.5 Katërkëndëshat. Shuma e këndeve të brendshme

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurë është dhënë një shumëkëndësh.

Emërtoni shumëkëndëshin.

Tregoni llojin e shumëkëndëshit.

Gjeni këndet e brendshme të shumëkëndëshit. Me ndihmën e këndmatësit matni secilin prej këndeve të brendshme.

Gjeni shumën e tyre.

Gjeni këndet e jashtme të shumëkëndëshit. Matni këndet dhe gjeni shumën e tyre.

Çfarë vini re?

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

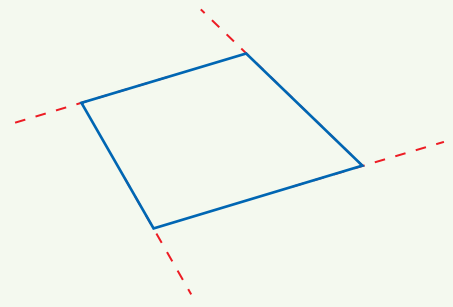


Fig. 5.24

B Vrojttoni dhe mësoni



Mbani mend:

Shumëkëndëshi që ka katër brinjë quhet **katërkëndësh**.

Në figurën 5.25/a është paraqitur një katërkëndësh konveks, kurse në figurën 5.25/b është paraqitur një katërkëndësh konkav.

Më tutje ne do të shqyrtojmë vetëm **katërkëndësha konveksë**, të cilët do t'i quajmë **katërkëndësha**.

Në figurën 5.25/a brinjët [AB] dhe [CD] quhen **brinjë të përballshme** të katërkëndëshit. Po kështu, edhe brinjët [AD] dhe [BC] janë të përballshme të katërkëndëshit. Brinjët [AC] dhe [BD] quhen diagonale të katërkëndëshit.

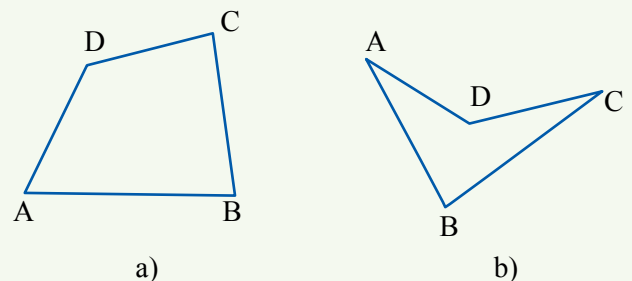


Fig. 5.25



Mbani mend:

Shuma e masave të këndeve të brendshme të katërkëndëshit është 360° . Shuma e masave të këndeve të jashtme të katërkëndëshit është 360° .

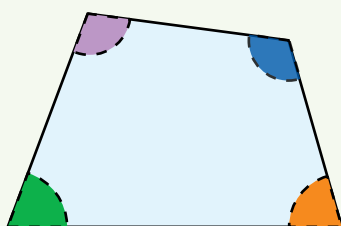


Fig. 5.26



Punë në grup

Me vizore dhe laps, vizatoni një katërkëndësh.

Priteni me kujdes.

Tani ngjyrosni secilin kënd me ngjyra të ndryshme.

Pritini këndet sipas vijës së ndërprerë. Vendosini me kujdes këndet pranë njëri-tjetrit.

Çfarë këndi formohet me këto katër kënde?

Nëpërmjet matjeve treguat se shuma e këndeve të brendshme të katërkëndëshit është 360° .

Të argumentojmë pse.

Në figurën 5.27 është dhënë katërkëndëshi ABCD. Ai ndahet në dy trekëndësha prej diagonales [AC]. Dimë se shuma e këndeve të brendshme në çdo trekëndësh është 180° .

Kështu që, për trekëndëshin ABC, mund të shkruajmë:

$$m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) = 180^\circ$$

Për trekëndëshin ADC mund të shkruajmë:

$$m(\angle 4) + m(\angle 5) + m(\angle 6) = 180^\circ$$

Duke mbledhur anë për anë barazimin e parë dhe të dytë dhe duke përdorur vetitë e ndërrimit e të shoqërimit, kemi:

$$[m(\angle 1) + m(\angle 6)] + m(\angle 2) + [m(\angle 3) + m(\angle 4)] + m(\angle 5) = 360^\circ$$

Por, $m(\angle 1) + m(\angle 6) = m(\angle BAD)$ dhe $m(\angle 3) + m(\angle 4) = m(\angle BCD)$.

Duke zëvendësuar, marrim:

$$m(\angle BAD) + m(\angle 2) + m(\angle BCD) + m(\angle 5) = 360^\circ.$$

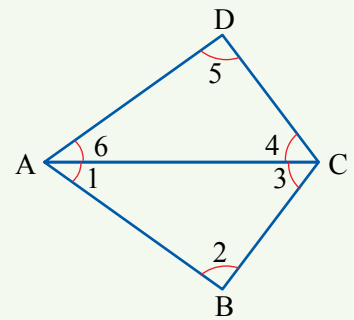


Fig. 5.27

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Tri kënde të një katërkëndëshi janë 70° , 90° , 110° . Gjeni masën e këndit të katërt.
2. Këndet e një katërkëndëshi i kanë masat numra që vijnë duke u rritur me nga 20° . Gjeni masat e këndeve.
3. Konstruktoni një katror me brinjë 5 cm dhe një trekëndësh barabrinjës me brinjë po 5 cm. Formoni figura gjeometrike me ndihmën e dy shumëkëndëshave. Njehsoni masën e këndeve të brendshme dhe të jashtme të shumëkëndëshave që formuat.

USHTRIME

- 1** Në katërkëndëshat e mëposhtëm, gjeni këndet e panjohura.

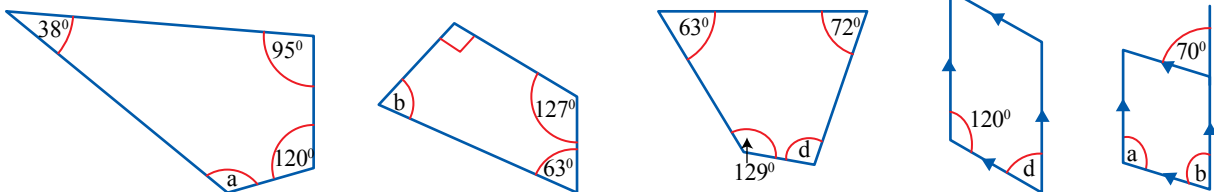


Fig. 5.28

- 2** Duke matur këndet e një katërkëndëshi, Andi gjeti masat e tyre: 140° ; 63° ; 126° ; 32° . Ada i thotë se ka gabuar në matje. A ka të drejtë Ada? Argumentoni.

- 3** Në figurën 5.29, gjeni masën e këndit k .

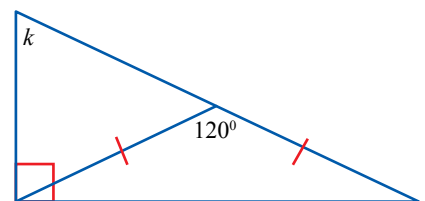


Fig. 5.29

- 4** Në një katërkëndësh jepen dy kënde 87° dhe 75° . Gjeni masat e këndeve të tjera të këtij katërkëndëshi duke ditur se ato janë të barabarta.
- 5** Gjeni këndet e një katërkëndëshi, në qoftë se masat e këndeve të jashtme të tij i përgjigjen këtij raporti: $1 : 2 : 3 : 6$.

5.6 Shuma e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit konveks

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurë është dhënë një shumëkëndësh.

Emërtoni shumëkëndëshin. Tregoni llojin e shumëkëndëshit.

Me ndihmën e këndmatësit matni secilin prej këndeve të brendshme. Gjeni shumën e tyre.

Matni këndet e brendshme të shumëkëndëshit dhe gjeni shumën e tyre.

Çfarë vini re?

Nga i njëjti kulm i shumëkëndëshit hiqni diagonalet. Në sa trekëndësha ndahet shumëkëndëshi?

Shumëzoni 180° me numrin e trekëndëshave. Krahasoni vlerën që gjetët me shumën e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit.

Diskutoni.

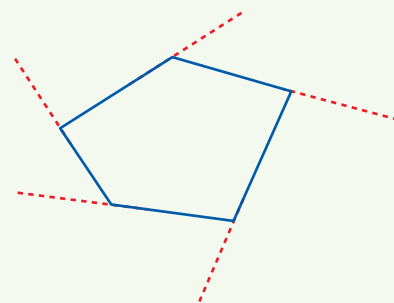


Fig. 5.30

B Vrojtoni dhe mësoni

Në figurën 5.31 është paraqitur një gjashtëkëndësh ABCDEF.

Janë tërhequr të gjitha diagonalet që dalin nga një kulm i tij (kulmi A).

Vihet re se gjashtëkëndëshi është ndarë në 4 trekëndësha ($4 = 6 - 2$).

Në secilin trekëndësh shuma e këndeve të brendshme është 180° .

Po të mbledhim të gjitha këndet e brendshme të trekëndëshave do të marrim shumën e këndeve të brendshme të gjashtëkëndëshit. Pra, shuma e këndeve të brendshme të gjashtëkëndëshit është $4 \cdot 180^\circ$ ose $(6 - 2) \cdot 180^\circ$.

Në figurën 5.32 është paraqitur një shtatëkëndësh ABCDEFG.

Duke hequr të gjitha diagonalet e tij që dalin prej kulmit A, ai është ndarë në 5 trekëndësha ($5 = 7 - 2$). Prandaj shuma e këndeve të brendshme të tij është $5 \cdot 180^\circ$ ose $(7 - 2) \cdot 180^\circ$.

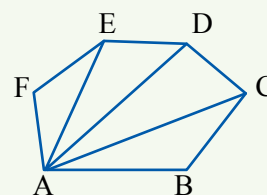


Fig. 5.31

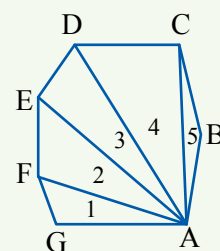


Fig. 5.32



Punë në grup

Vizatoni shumëkëndësha të ndryshëm. Hiqni të gjitha diagonalet nga i njëjti kulm i tij.

Gjeni shumën e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit të konstruktuar duke shumëzuar $(n - 2)$ me 180° , ku n është numri i brinjëve të shumëkëndëshit. Matni këndet e brendshme të shumëkëndëshit me këndmatës. Diskutoni çfarë vini re.

Gjeni këndet e jashtme të shumëkëndëshit të konstruktuar. Matini dhe gjeni shumën e tyre. Krahasoni përfundimin tuaj me atë të shokut/shoqes.

**Mbani mend:**

Shuma e masave të këndeve të brendshme të një n -këndëshi, ku n është numri i brinjëve, është $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Shuma e këndeve të jashtme të çdo shumëkëndëshi është 360° .

Shembulli 1

Gjeni shumën e masave të këndeve të brendshme të 10-këndëshit.

Zgjidhje

Shuma gjendet nga formula $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$, duke zëvendësuar në të $n = 10$.

Ajo është $S = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

Duke ditur shumën e masave të këndeve të brendshme të shumëkëndëshit, mund të gjejmë llojin e shumëkëndëshit, pasi të gjejmë numrin e brinjëve të tij.

Shembulli 2

Sa brinjë ka shumëkëndëshi, që shumën e masave të këndeve të brendshme e ka 1080° ?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e brinjëve të shumëkëndëshit.

Sipas kushtit kemi $(x - 2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ$, prej ku del $x - 2 = 6$ d.m.th. $x = 8$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni shumën e masave të këndeve të brendshme të 12-këndëshit.
2. Gjeni shumën e masave të këndeve të jashtme të 9-këndëshit.
3. Sa brinjë ka shumëkëndëshi, i cili e ka shumën e masave të këndeve të brendshme 1800° ?
4. Në trekëndëshin e rregullt, këndi i jashtëm i tij ka masën $360^\circ : 3 = 120^\circ$, ndërsa këndi i brendshëm e ka masën: $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Në pesëkëndëshin e rregullt këndi i jashtëm e ka masën $360^\circ : 5 = 72^\circ$ dhe këndi i brendshëm $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Duke ditur që këndi i jashtëm i një shumëkëndëshi të rregullt gjendet nëpërmjet formulës $360^\circ : n$, ku n është numri i brinjëve të shumëkëndëshit, gjeni këndin e brendshëm të 10-këndëshit; të 12-këndëshit; të 15-këndëshit të rregullt.

USHTRIME

- 1 Gjeni shumën e masave të këndeve të brendshme të shumëkëndëshit që ka:
a) 15 brinjë; b) 11 brinjë.
- 2 Sa brinjë ka shumëkëndëshi që e ka shumën e masave të këndeve të brendshme:
a) 3600° b) 3960° ?
- 3 Gjeni shumën e masave të këndeve të jashtme të n -këndëshit në rast se:
a) $n = 5$ b) $n = 12$.
- 4 A ka shumëkëndësh që shumën e masave të këndeve të jashtme ta ketë:
a) sa shuma e këndeve të brendshme? b) sa dyfishi i kësaj shume?

5.7 Diagonalet e shumëkëndësive

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 5.33 janë dhënë disa shumëkëndësia.

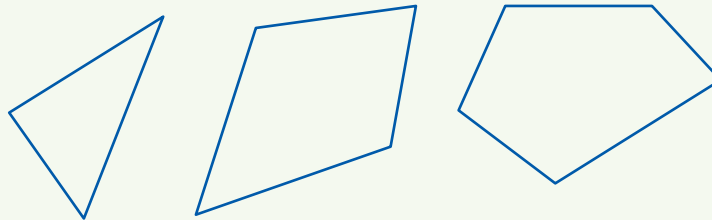


Fig. 5.33

Tregoni numrin e brinjëve të secilit shumëkëndësh.

Tërhiqni diagonalet nga i njëjti kulm i shumëkëndëshit. Sa diagonale tërhiqen nga i njëjti kulm për secilin nga shumëkëndëshit?

Tërhiqni të gjitha diagonalet e shumëkëndëshit. Sa diagonale mund të tërhiqni në secilin prej tyre?

Provoni të merrni shumëkëndësia të tjerë. Kryeni të njëjtat veprime.

Çfarë vini re? Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Në figurën 5.34 është paraqitur një pesëkëndësh.

Nga kulmi A i tij dalin 2 diagonale. Genci thotë:

“Pesëkëndëshi ynë ka 5 kulme. Nga çdo kulm i tij dalin dy diagonale, prandaj ai ka $5 \cdot 2 = 10$ diagonale”. A ka të drejtë Genci?

Secilën nga diagonalet e pesëkëndëshit Genci e numëron dy herë.

P.sh.: diagonalen [AD] e numëron një herë të dalë prej kulmit A dhe

një herë tjetër të dalë prej kulmit D. Për këtë arsye, numri i diagonaleve nuk është 10, por

$10 : 2$, d.m.th. 5. Ky numër mund të shkruhet $\frac{5 \cdot (5-3)}{2}$.

Në figurën 5.35 është paraqitur gjashtëkëndëshi ABCDEF.

Nga çdo kulm i tij (p.sh.: nga A) dalin 3 diagonale. Por,

gjashtëkëndëshi ynë ka 6 kulme. Prandaj numri i diagonaleve të tij do të jetë jo $3 \cdot 6$, por $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$. Këtë numër mund ta shkruajmë

$$\frac{6 \cdot (6-3)}{2}.$$

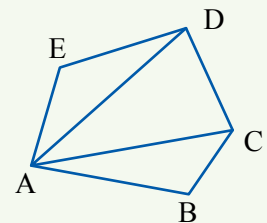


Fig. 5.34

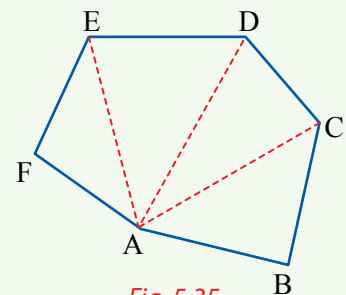


Fig. 5.35



Mbani mend:

Nga një kulm i një shumëkëndëshi tërhiqen $(n-3)$ diagonale, ndërsa numri i përgjithshëm

i diagonaleve të tij është $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, ku n është numri i brinjëve të shumëkëndëshit.

Shembulli 1

Për shtatëkëndëshin numri i diagonaleve është $\frac{7 \cdot (7-3)}{2} = 14$.

Shembulli 2

Sa brinjë ka shumëkëndëshi që ka 35 diagonale?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e brinjëve të shumëkëndëshit. Sipas kushtit kemi $\frac{x \cdot (x-3)}{2} = 35$, prej ku $x(x-3) = 70$. Nga barazimi $x(x-3) = 10(10-3)$ dhe fakti se x duhet të jetë numër natyror, marrim që $x = 10$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Gjeni numrin e diagonaleve të shumëkëndëshit që ka:
a) 11; b) 12; c) 13 brinjë.
- Sa brinjë ka shumëkëndëshi konveks që ka 20 diagonale?
-  Konstruktioni një 6-këndësh të rregullt. Tërhiqni diagonalet nga i njëjti kulm. Pritni trekëndëshat e formuar. Konstruktioni një mozaik me ta.

USHTRIME

- Gjeni numrin e diagonaleve të shumëkëndëshit me:
a) 15 brinjë; b) 20 brinjë; c) 25 brinjë.
- Sa brinjë ka shumëkëndëshi konveks që ka:
a) 27 diagonale? b) 14 diagonale? c) 54 diagonale?
- A ka shumëkëndësh me 3 diagonale? Argumentoni përgjigjen.
- Cili lloj paralelogrami i ka diagonalet të barabarta?
- A është drejtkëndësh katërkëndëshi me diagonale të barabarta?
- Si janë ndërmjet tyre diagonalet e shumëkëndëshit të rregullt?
- Konstruktioni një 8-këndësh të rregullt. Tërhiqni diagonalet nga i njëjti kulm.
a) Sa diagonale tërhiqen nga i njëjti kulm i 8-këndëshit?
b) A mund t'i dalloni diagonalet e barabarta ndërmjet tyre?
c) Sa është numri i diagonaleve të 8-këndëshit?

5.8 Trapezi

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 5.36 është dhënë një katërkëndësh.

Matni largesën ndërmjet brinjëve $[AB]$ dhe $[CD]$.

Me ndihmën e këndmatësit matni masën e këndeve të katërkëndëshit.

Gjeni shumën e masës së këndeve $\angle A$ dhe $\angle D$, si dhe të këndeve $\angle B$ dhe $\angle C$.

Çfarë vini re? Diskutoni.

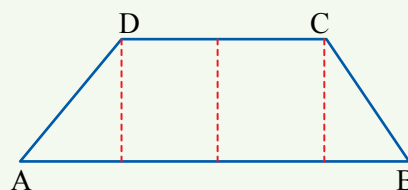


Fig. 5.36

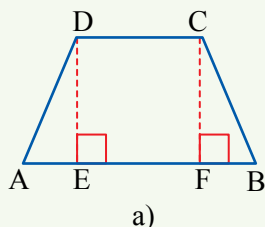
B Vrojtoni dhe mësoni



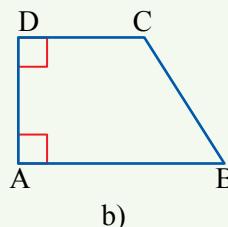
Mbani mend:

Trapez quhet katërkëndëshi që ka vetëm një çift brinjësh të përballshme paralele.

Në figurën 5.37 janë paraqitur dy trapeza, në të cilët $[AB] \parallel [CD]$, kurse $[AD]$ nuk është paralele me $[BC]$.



a)



b)

Fig. 5.37

Brinjët paralele $[AB]$, $[CD]$ quhen **baza të trapezit** ($[AB]$ është baza e poshtme, $[CD]$ është baza e sipërme). Brinjët jo paralele $[AD]$, $[BC]$ quhen **krahë anësore** të trapezit.

Largesa midis bazave të trapezit quhet **lartësi e trapezit**.

Në figurën 5.37/a janë paraqitur dy lartësi të trapezit ($[DE]$, $[CF]$); ato kanë gjatësi të barabarta.

Shuma e dy këndeve fqinje, që mbështeten mbi një brinjë anësore është 180° :

$$m(\angle A) + m(\angle D) = 180^\circ \text{ dhe } m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ.$$

Nëse njëra nga brinjët anësore është pingule me bazat, trapezi quhet **kënddrejtë**. i tillë është trapezi i paraqitur në figurën 5.37/b, ku $[AD] \perp [AB]$ dhe $[AD] \perp [CD]$.

Lartësi e këtij trapezi është vetë $[AD]$.

Nëse brinjët anësore të trapezit janë të barabarta, trapezi quhet **dybrinjënjëshëm (barakrahës)**.

Veti të trapezit dybrinjënjëshëm

I. Këndet e ngushta, që mbështeten në bazën e madhe, janë kongruente.

II. Këndet e gjera, që mbështeten në bazën e vogël, janë kongruente.

III. Diagonalet janë kongruente, kanë gjatësi të barabartë ($AC = BD$).

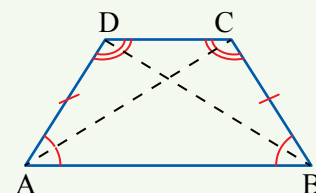


Fig. 5.38

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Në trapezin ABCD gjeni masën e këndit të panjohur $\angle x$, sipas të dhënave në figurën 5.39.

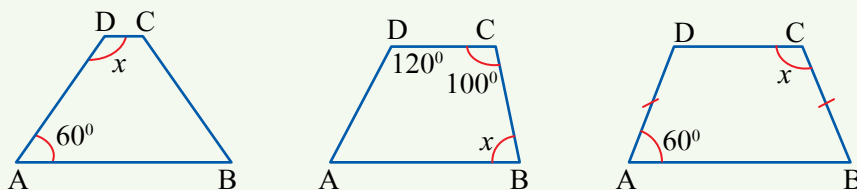


Fig. 5.39

2. Perimetri i një trapezi dybrinjënjëshëm është 30 cm dhe shuma e bazave është 20 cm. Gjeni brinjën anësore.



3. Në figurë është dhënë një kornizë. Dalloni trapezet në të. Prisni në letra me ngjyra trapezë të ngjashëm dhe modeloni vetë një kornizë fotografike.

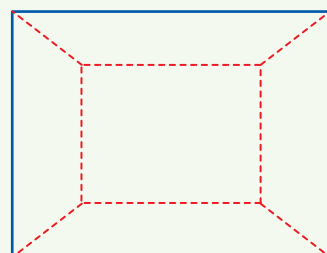
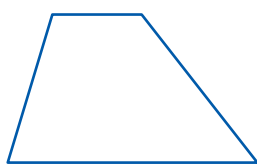


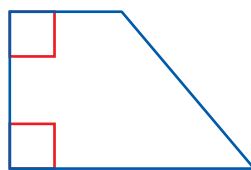
Fig. 5.40

USHTRIME

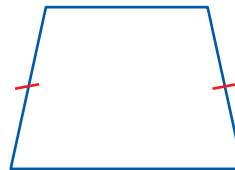
- 1 Përshkruani secilin nga katërkëndëshat e paraqitur në figurën 5.41, pa përdorur fjalën “trapez”.



a)



b)



c)

Fig. 5.41

- 2 Tërhiqni dy drejtëza paralele të prera nga dy të tjera. Ç’lloj katërkëndëshi merrni? Përshkruani vetitë e tij.
- 3 Një trapez dybrinjënjëshëm është formuar nga tre trekëndësha barabrinjës kongruentë ku secili prej tyre e ka perimetrin 249 cm. Gjeni:
a) këndet e trapezit; b) perimetrin e tij.
- 4 Në një trapez dybrinjënjëshëm, brinja anësore është 10 cm, perimetri është 50 cm dhe baza e madhe është tri herë më e madhe se baza e vogël. Gjeni bazat e trapezit.
- 5 Në një trapez dybrinjënjëshëm, brinja anësore është 18 cm dhe është sa gjysma e bazës së madhe. A jeni në gjendje të gjeni gjatësinë e bazës së vogël?
- 6 Çfarë lloj katërkëndëshi mund të ketë këto kënde: $m(\angle A) = 72^\circ$; $m(\angle B) = 108^\circ$; $m(\angle C) = 142^\circ$; $m(\angle D) = 38^\circ$? Provoni ta konstruktioni një katërkëndësh të tillë.
- 7 Emërtoni katërkëndëshin që plotëson këto kushte:
[AB] $\parallel$ [CD]; AC = BD; $m(\angle A) = m(\angle B)$; $m(\angle A) + m(\angle D) = 180^\circ$.

5.9 Paralelogrami. Vetë të paralelogramit

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 5.42 janë dhënë drejtëzat paralele (AB) dhe (CD), të prerë nga drejtëzat paralele (AD) dhe (BC). Tërheqim drejtëzën (BD) (figura 5.43/a).

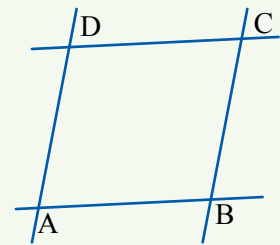


Fig. 5.42

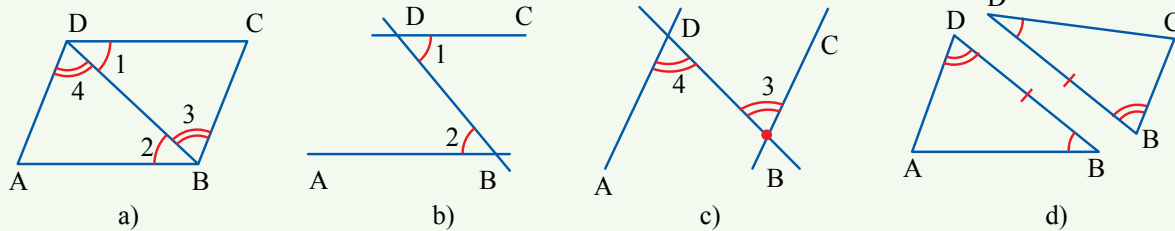


Fig. 5.43

1. A mund të themi që $m(\sphericalangle 1) = m(\sphericalangle 2)$? Shikoni figurën 5.43/b.
 2. A mund të themi që $m(\sphericalangle 3) = m(\sphericalangle 4)$? Shikoni figurën 5.43/c.
 3. A mund të themi që $\triangle ABD \equiv \triangle DCB$? Shikoni figurën 5.43/d.
- Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Paralelogram quhet katërkëndëshi që i ka brinjët e përballshme dy nga dy paralele.

Në figurën 5.44 është paraqitur paralelogrami ABCD, tek i cili $[AB] \parallel [CD]$ dhe $[AD] \parallel [BC]$. Këndet $\sphericalangle A$ dhe $\sphericalangle C$ janë **këndë të përballshme**; po kështu këndet $\sphericalangle B$ dhe $\sphericalangle D$ janë **këndë të përballshme**.

Këndet $\sphericalangle A$ me $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ me $\sphericalangle C$, $\sphericalangle C$ me $\sphericalangle D$ dhe $\sphericalangle D$ me $\sphericalangle A$, që i kanë kulmet në të njëjtën brinjë, quhen **këndë fqinje** të paralelogramit.

Disa vetë të paralelogramit.

- I. Brinjët e përballshme të paralelogramit janë dy nga dy kongruente.
- II. Këndet e përballshme të paralelogramit janë dy nga dy kongruentë.
- III. Në çdo paralelogram, shuma e masave të dy këndeve fqinje e kanë shumën 180° .
- IV. Pika ku priten diagonalet është mes i secilës diagonale.

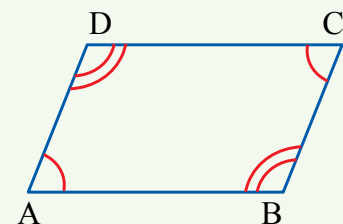


Fig. 5.44



Mbani mend:

Largesa midis dy brinjëve të kundërta të paralelogramit quhet lartësi e paralelogramit.

Në figurën 5.63, $[DE]$ është lartësia e paralelogramit që jep largesën midis brinjëve $[AB]$ dhe $[CD]$, kurse $[DF]$ është lartësia tjetër e paralelogramit që jep largesën midis brinjëve $[BC]$ dhe $[AD]$.

Shpesh kërkojmë të dimë nëse një katërkëndësh i dhënë është paralelogram.

Për këtë na shërbejnë vetitë e mëposhtme:

- I. Nëse një katërkëndësh i ka brinjët e përballshme dy nga dy kongruente, atëherë ai është paralelogram.
- II. Nëse dy brinjë të përballshme të një katërkëndëshi janë paralele dhe kongruente, atëherë katërkëndëshi është paralelogram.
- III. Nëse në një katërkëndësh, këndet e përballshme janë dy nga dy kongruente, atëherë ai është paralelogram.
- IV. Nëse në një katërkëndësh, pika ku priten diagonalet është mesi për secilën prej tyre, atëherë ai katërkëndësh është paralelogram.

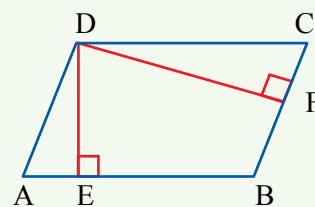


Fig. 5.45

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Cili nga katërkëndëshat e paraqitur në figurë është paralelogram? Argumentoni përgjigjen.

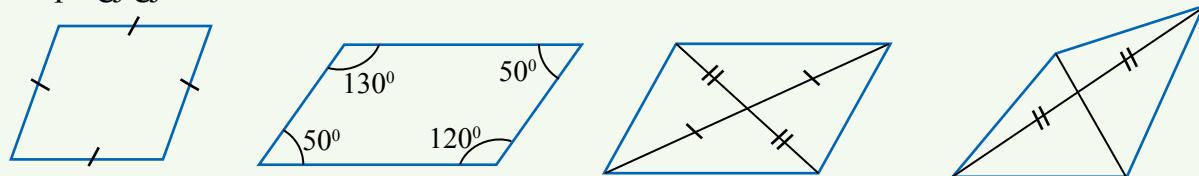
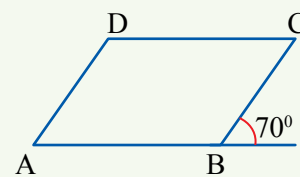


Fig. 5.46

2. Gjeni masën e këndeve të paralelogramit ABCD në figurën 5.47.
3. Në paralelogramin ABCD, diagonalet janë $AC = 10$ cm; $BD = 14$ cm, kurse brinja $[AD]$ është 6 cm. Gjeni perimetrin e trekëndëshit BOC (O është pika ku priten diagonalet).



a)

Fig. 5.47

USHTRIME

- 1 Gjeni perimetrin e katërkëndëshave të paraqitur në figurën 5.48.

- 2 Në paralelogramin ABCD diagonalet $[AC]$ dhe $[BD]$ janë 20 cm dhe gjatësi e brinjës $[AB]$ është 10 cm. Gjeni këndet e paralelogramit.



Fig. 5.48

- 3 Shuma e masave të dy këndeve të paralelogramit është 120° . Gjeni masat e këndeve të paralelogramit.
- 4 Gjeni masat e këndet e paralelogramit nëse:
 - a) masat e dy prej tyre kanë raportin $2 : 3$;
 - b) masa e njërës kënd është 20° më i madh se tjetri.
- 5 A ekziston një paralelogram që njërën brinjë ta ketë 10 cm, kurse dy diagonalet të jenë:
 - a) 10 cm dhe 10 cm? b) 10 cm dhe 12 cm? c) 8 cm dhe 10 cm?
- 6 Në paralelogramin ABCD, M është mesi i $[AD]$ dhe N mesi i $[BC]$. Ç'lloj katërkëndëshi është MDCN? Arsyetoni përgjigjen.

5.10 Drejtkëndëshi. Rombi. Katrori

A Kërkoni dhe zbuloni

Tërhiqni dy drejtëza paralele p dhe q . Në drejtëzën p merrni dy pika A, B dhe tërhiqni prej tyre pingulet me drejtëzën q .

A është paralelogram katërkëndëshi i formuar?

Si janë këndet e tij?

Tërhiqni dy diagonalet e katërkëndëshit. Matni dhe krahasoni gjatësitë e tyre. Çfarë vini re? Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Drejtkëndësh është paralelogrami që i ka të katra këndet të drejta.

Drejtkëndëshi i ka të gjitha vetitë e paralelogramit, por ka edhe veti të tjera.

Nëpërmjet matjeve treguat se diagonalet e drejtkëndëshit janë kongruente.

Është e vërtetë edhe fjalja: “Nëse një paralelogram ka diagonale kongruente, atëherë ai është drejtkëndësh”.

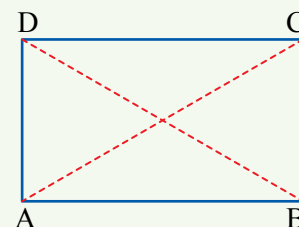


Fig. 5.49



Mbani mend:

Romb është paralelogrami që i ka të katër brinjët kongruente.

Rombi i ka të gjitha vetitë e paralelogramit, por ka edhe veti të tjera.

I. Diagonalet e rombit janë simetrale të këndeve të tij.

II. Diagonalet e rombit janë pingule midis tyre.

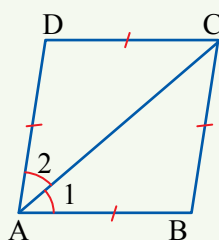


Fig. 5.50

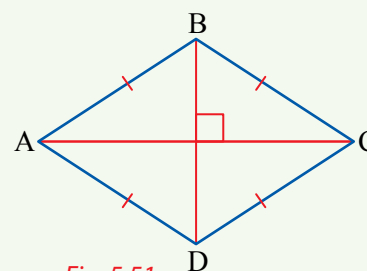


Fig. 5.51



Mbani mend:

Katror është drejtkëndëshi që i ka të katra brinjët kongruente.

E thënë ndryshe: Katror është rombi që i ka të gjitha këndet të drejta.

Katrori i ka të gjitha vetitë e paralelogramit, të drejtkëndëshit dhe të rombit.



Punë në grup

Konstruktioni një drejtkëndësh, një romb, një katror. Tërhiqni diagonalet e tyre. Pritni trekëndëshat e formuar. Krahasoni trekëndëshat. Çfarë do të vini re?

C Ushtroni duke zbatuar

- Konstruktoni një kënd $\angle MAN$. Konstruktoni një rreth me qendër A, që i pret krahët e këndit në pikat B, D. Me qendër në B dhe me po atë rreze, konstruktoni një hark. Me qendër në D dhe me po atë rreze, konstruktoni një hark tjetër. Shënoni me C pikën ku priten këto dy harqe.
 - A i ka katërkëndëshi ABCD brinjët e kundërta dy nga dy kongruente? A është ai paralelogram?
 - Si janë të katra brinjët e këtij paralelogrami?
 - Çfarë keni konstruktuar, duke zgjidhur këtë ushtrim?
- Kryeni konstruktivet që bëtë në ushtrimin 1, në rastin kur këndi fillestar $\angle MAN$ është i drejtë. Çfarë do të merrni në këtë rast?
- Formoni një mozaik duke përdorur drejtkëndëshin, katrorin dhe rombin.

USHTRIME

- Në paralelogramin ABCD këndi $\angle A = 90^\circ$.
 - Gjeni këndet $\angle B$, $\angle D$, $\angle C$.
 - Ç'loj paralelogrami është ABCD?
 - Cilat kushte mjaftojnë që paralelogrami të jetë drejtkëndësh?
- Në paralelogramin ABCD kemi $AB = BC$.
 - Tregoni që $[CD]$ dhe $[DA]$ janë kongruentë me $[AB]$.
 - Ç'loj paralelogrami është ABCD?
 - Cilat kushte mjaftojnë që paralelogrami të jetë romb?
- Në figurën 5.52 është dhënë drejtkëndëshi ABCD, në të cilin diagonalja $[AC]$ formon me brinjën $[AB]$ këndin 30° .
 - Tregoni që $\triangle AOB$ është trekëndësh dybrinjënjëshëm.
 - Gjeni gjatësinë BC, nëse $AC = 12$ cm.
- Në figurën 5.53 është dhënë rombi ABCD. Gjeni x , y sipas të dhënave të figurës.
- Në rombin ABCD diagonalet $[AC]$ dhe $[BD]$ janë kongruente. Tregoni që ABCD është katror.
- Në rombin ABCD kemi $AC = AB$. Gjeni këndet e rombit.
- Tregoni nëse është e vërtetë apo e gabuar fjalia:
 - Në një drejtkëndësh diagonalet janë pingule.
 - Diagonalja e ndan drejtkëndëshin në dy trekëndësha kongruentë.
 - Çdo drejtkëndësh është paralelogram.
 - Çdo katror është romb.
 - Çdo paralelogram është romb.
 - Çdo drejtkëndësh është romb.

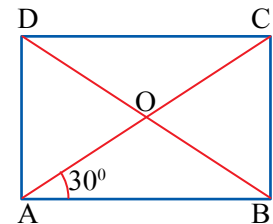


Fig. 5.52

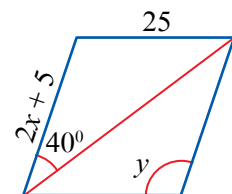
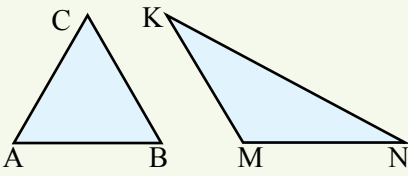
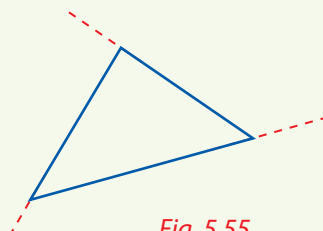


Fig. 5.53

5.11 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

<i>Tashmë kemi mësuar</i>	<i>Provoni të zgjidhni</i>
Konstruktimin e disa prej shumëkëndëshave të rregullt.	- Konstruktoni një gjashtëkëndësh të rregullt me brinjë 3 cm: - me vizore dhe kompas; - me vizore dhe këndmatës. - Konstruktoni një trekëndësh kënddrejtë me katete të barabarta me gjatësi 3 cm - me vizore dhe kompas; - me vizore dhe këndmatës. - Konstruktoni katrorin me diagonale 6 cm.
Marrëdhënien e këndeve të brendshme të trekëndëshit (shuma e tyre është 180°).	- Plotësoni fjalinë: Shuma e masave të këndeve të brendshme të trekëndëshit është _____. - Gjeni këndet e trekëndëshave me sa më pak matje.  <i>Fig. 5.54</i>
Marrëdhënien e këndeve të jashtme (shuma e tyre është 360°) të trekëndëshit, sipas metodave të ndryshme.	- Plotësoni fjalinë: Shuma e masave të këndeve të jashtme të trekëndëshit është _____. - Dy nga këndet e jashtme të një trekëndëshi kanë masën 150° dhe 50°. Gjeni masën e këndeve të trekëndëshit. - Me sa më pak matje, gjeni masën e këndeve të brendshme dhe të jashtme të trekëndëshit.  <i>Fig. 5.55</i>
Njehsimin e madhësive të këndeve të trekëndëshit (të jashtme e të brendshme) kur dihen madhësitë e dy këndeve të tij.	Dy kënde të brendshme të trekëndëshit i kanë masat 65° dhe 75°. Gjeni masën e këndit të tretë.

	10. Gjeni masat e këndeve të trekëndëshit kënddrejtë nëse: a) njëri kënd i ngushtë është $30^{\circ}30'$ më i madh se tjetri; b) njëri kënd i ngushtë është sa dyfishi i tjetrit.
Shumën e masave të këndeve të brendshme, shumën e këndeve të jashtme në shumëkëndësha.	11. Plotësoni fjalitë: a) Shuma e masave të këndeve të brendshme të një n-këndëshi është _____. b) Shuma e masave të këndeve të jashtme të një n-këndëshi është _____. 12. Masa e dy këndeve të një katërkëndëshi janë 87° dhe 103°. Gjeni masat e dy këndet e tjera të katërkëndëshit konveks, duke ditur që ata janë kongruentë. 13. Gjeni shumën e masave të këndeve të brendshme të 15-këndëshit.
Gjetjen e shumëkëndëshit përkatës duke u nisur nga shuma e këndeve.	14. Në cilin shumëkëndësh shuma e këndeve të brendshme është 1980° ?
Numrin e diagonaleve të një shumëkëndëshi.	15. Gjeni numrin e diagonaleve të një shtatëkëndëshi.
Përshkrimin, emërtimin dhe klasifikimin e katërkëndëshave në bazë të pozitës së brinjëve (paralelogramet, trapezat, rombet).	16. Përshkruani vetitë e trapezit. 17. Përshkruani vetitë e paralelogramit, drejtkëndëshit, rombit dhe katrorit. Dalloni vetitë e përbashkëta dhe të veçanta për secilën prej tyre. 18. Në një paralelogram masa e njërit kënd është 38 më e madhe se masa e këndit fqinj me të. Gjeni masat e këndeve të paralelogramit. 19. Janë dhënë çiftet e diagonaleve të një katërkëndëshi. Tregoni për secilin katërkëndësh llojin e tij.

Fig. 5.56

5.12 Vlerësim

Koha: 45 minuta

- 1 Rrethoni përgjigjen e saktë:
Diagonale e shumëkëndëshit është segmenti që bashkon:
a) dy kulme të kundërta; b) dy kulme jofqinje; c) dy kulme fqinje. (1 pikë)
- 2 Cilën veti nuk gëzon rombi?
a) Ka kënde fqinje kongruente. b) Ka kënde fqinje komplementare.
c) Ka brinjë të përballshme paralele. d) Ka brinjë të barabarta. (1 pikë)
- 3 Gjeni masën e këndit të brendshëm të një pesëkëndëshi të rregullt. (2 pikë)
- 4 Gjeni masën e këndit të trekëndëshit duke ditur që $\angle A = \angle B = 2\angle C$ (3 pikë)
- 5 a) Gjeni numrin e diagonaleve të një 9-këndëshi. (2 pikë)
b) Sa brinjë ka shumëkëndëshi që e ka shumën e këndeve 900° ? (2 pikë)
- 6 Gjeni vlerën e x dhe masën e këndeve të paralelogramit ABCD (fig. 5.57). (2 pikë)

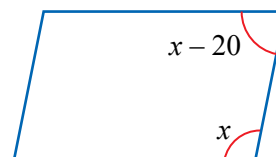


Fig. 5.57

- 7 Është dhënë paralelogrami ABCD. Nga pika C tërheqim një paralele me [BD]; kjo pret zgjatimin e [AB] në pikën P dhe zgjatimin e [AD] në pikën Q.
a) Konstruktoni figurën. (2 pikë)
b) Tregoni që katërkëndëshat DQCB dhe DCPB janë paralelograme. (2 pikë)
- 8 Konstruktoni rombin ABCD, nëse janë dhënë pikëprerja O e diagonaleve dhe $AC = 4$ cm; $BD = 6$ cm. (2 pikë)
- 9 Në për pikat A dhe A_1 të drejtëzës d janë tërhequr drejtëza pingule me d dhe në të janë marrë pikat B dhe B_1 , të tilla që: $AB = A_1B_1 = 3$ cm dhe $m(\angle ABO) = m(\angle A_1B_1O) = 50^\circ$.
Tregoni që: a) $OA = OA_1$; b) $OB = OB_1$ (3 pikë)

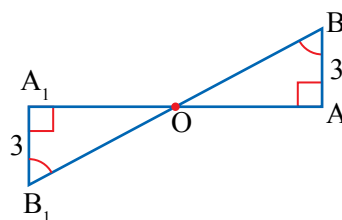


Fig. 5.76

6

Fuqitë

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

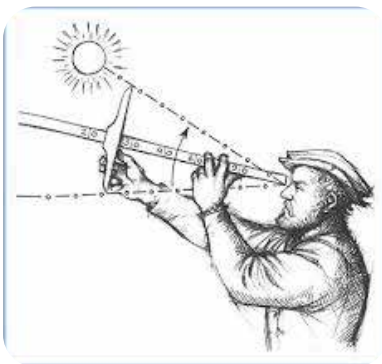
- lexon dhe shkruan fuqitë me eksponent numër natyror;
- njehson vlerën e fuqisë me eksponent numër natyror dhe bazë numër racional;
- dallon rastet kur vlera e fuqisë është numër pozitiv apo negativ (varësisht nga baza dhe eksponenti);
- shpreh numrin e plotë në trajtë shkencore (p.sh.: si zbatim të distanca mes planetëve);
- interpreton rrënjën katrore si veprim të kundërt të ngritjes në katror;
- njehson rrënjën katrore duke provuar/me tentativë dhe duke përdorur kalkulatorin;
- modelon dhe zgjidh problema, duke përdorur fuqitë;
- përdor kalkulatorin për njehsimin e fuqisë.



Fjalë kyçe:

fuqi, eksponent, bazë, prodhim faktorësh të barabartë, eksponent numër natyror, bazë numër racional, trajtë shkencore, veti të fuqisë, rrënjë katrore.

A E DINI SE...?



Rreth 400 vjet më parë, askush nuk përdorte eksponentë. Më pas matematikanët vendosën të mos shkruanin të gjithë faktorët dhe simbolet e shumëzimit dhe të përdorin eksponentët. Eksponentët u përdorën për herë të parë në shekullin XV nga Nikola Shuke (*Nicolas Chuquet*).

Fjala "eksponent" u krijua në vitin 1544 nga Mikael Shtifel (*Michael Stifel*). Një shekull më vonë, Robert Rekord (*Robert Recorde*) zhvilloi më tej sistemin e eksponentëve, duke përdorur termat "katror", "kub" etj. Sot, shumë degë të shkencës që punojnë me numra të mëdhenj përdorin eksponentët. Për shembull, procesi i njohur si datimi me radikarbon, që përdoret për

të përcaktuar moshën e mbetjeve fosile, mbështetet në një formulë që përmban një eksponent; në astronomi, për të dhënë largesën midis planetëve apo masat e tyre, si dhe të Diellit, përdorim fuqitë. Përveç përdorimit të tyre në matematikën teorike dhe në kërkimet shkencore, eksponentët dhe fuqitë gjejnë zbatim edhe në shumë profesione të tjera, si: në fizikë, kimi, inxhinieri, financë etj.



6.1 Kuptimi i fuqisë

A Kërkoni dhe zbuloni

Plotësoni vargun $5^2 = 5 \cdot 5$; $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$; $5^4 = \dots$; $5^5 = \dots$

Si mund ta shënoni shkurt prodhimin e dhjetë faktorëve të barabartë me 5?

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Shumën e disa mbledhorëve të barabartë e shkruajmë shkurt me ndihmën e shumëzimit. Kështu, në vend që të shkruajmë $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$, shkruajmë shkurt $7 \cdot 5 = 35$.

Ka një veprim që na lejon të shkruajmë shkurt **prodhimin** e disa faktorëve të barabartë midis tyre. Kështu, në vend që të shkruajmë $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$, shkruajmë shkurt $3^6 = 729$. Ky shënim lexohet “3 i ngritur në fuqi të gjashtë është 729”.

Në këtë shënim numri 3 quhet **bazë**, numri 6 quhet **eksponent**, kurse numri 729 (rezultati i veprimit) quhet **fuqi**.

Në mënyrë të ngjashme kemi: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Në përgjithësi, prodhimi i n faktorëve ($n \in N$ dhe $n > 1$) të barabartë me a quhet fuqi e n -të e numrit a dhe shkruhet

- a quhet bazë, n quhet eksponent.



Mbani mend:

Fuqia e një numri është numri që merret duke shumëzuar aq faktorë, të barabartë me bazën, sa njësi ka eksponenti. Eksponenti i fuqisë na tregon se sa faktorë të barabartë (me bazën) shumëzohen. Veprimi që bëjmë për të gjetur fuqinë quhet “ngritje në fuqi”.

Numri 3^2 (tre i ngritur në fuqi të dytë) lexohet ndryshe: “tre i ngritur në katror”.

Numri $(-5)^3$ (minus pesë i ngritur në fuqi të tretë) lexohet ndryshe: “minus pesë i ngritur në kub”.



Punë në grup

Njehsoni:

- $(+2)^2$; $(+2)^3$; $(+2)^4$; $(+2)^5$. Si është shenja e këtyre fuqive?
- $(-2)^2$; $(-2)^4$; $(-2)^6$. Si është shenja e këtyre fuqive?
- $(-2)^3$; $(-2)^5$; $(-2)^7$. Si është shenja e këtyre fuqive?
- 1^2 ; 1^3 ; 1^4 ; 1^5 ; 0^2 ; 0^3 ; 0^4 ; 0^5 . Çfarë vini re?



Mbani mend:

- Fuqia e një numri pozitiv është numër pozitiv.
- Fuqia e një numri negativ, kur eksponenti është çift, është numër pozitiv.
- Fuqia e një numri negativ, kur eksponenti është tek, është numër negativ.
- Për çdo numër n , natyror dhe më të madh se 1, kemi $1^n = 1$ dhe $0^n = 0$.

**Kujdes!**

- $a^1 = a$ për çdo numër a ;
- $a^0 = 1$ për çdo numër $a \neq 0$ (me marëveshje);
- 0^0 nuk ka kuptim (nuk përkufizohet).

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni: 3^2 ; $(-4)^3$; 2^5 .

2. Gjeni vlerën e x , nëse:

- a) $x^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$; b) $x^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;
 c) $4^x = 4 \cdot 4$; d) $(0,1)^x = (0,1) \cdot (0,1)$.

3. Plotësoni shënimet:

- a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (\dots)^4$;
 b) $(x-2) \cdot (x-2) \cdot (x-2) = (x-2)^{\dots}$;
 c) $(-3,2)^{\dots} = (-3,2) \cdot (-3,2)$.

4. Njehsoni:

- a) 3^1 ; b) $(-0,4)^1$; c) 5^0 ; d) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$.

5. Në një kopsht ka 4 parcela; në çdo parcelë ka 4 shkurre; në çdo shkurre ka 4 degë; në çdo degë ka 4 lule. Në sa lule të kopshtit mund të thithë nektar një bletë?

**USHTRIME**

1 Njehsoni:

- a) $(-3)^3$; b) 6^2 ; c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

2 Shkruani shkurt:

- a) $4 \cdot 4 \cdot 4$; b) $(-5) \cdot (-5)$; c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

3 Shkruani në formë prodhimi fuqitë:

- a) 3^5 ; b) x^4 ; c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; d) $(x-1)^3$.

4 Shkruani në trajtë fuqie numrat e vargut:

- a) 2; 4; 8; 16; 32; 64; b) 3; 9; 27; 81; c) -5, -25; -125; 625; d) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$.

5 Krahasoni:

- a) 5^2 me $5 \cdot 2$; b) 6^3 me $6 \cdot 3$; c) 1^7 me 1^5 ; d) 0^4 me 0^3 .

6 Krahasoni:

- a) 2^3 me 3^2 ; b) 4^3 me 3^4 ; c) 5^2 me 2^5 ; d) 10^2 me 2^{10} .

7 Njehsoni:

- a) $(2,5)^2$; b) $(-3,5)^2$; c) $(8-1)^2$; d) $\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2$.

- 8 Një topi i duhen 2 sekonda për të rënë nga maja e një godine në tokë. Gjeni lartësinë e godinës, nëse dini se $h = 5t^2$, ku h është lartësia e godinës dhe t është koha në sekonda.

6.2 Vetë të fuqive

A Kërkoni dhe zbuloni

Krahasoni $(-2)^3 \cdot (-2)^2$ me $(-2)^{3+2}$; $(-2)^5 : (-2)^2$ me $(-2)^{5-2}$; $[(-2)^2]^3$ me $(-2)^6$.
Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

I. Prodhimi i dy fuqive me bazë të njëjtë

Shembulli 1

Le të shumëzojmë dy fuqi me të njëjtën bazë: 3^4 dhe 3^2 .

Kemi $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$. Vëmë re që $3^4 \cdot 3^2 = 3^6 = 3^{4+2}$.



Mbani mend:

Prodhimi i dy fuqive me të njëjtën bazë është një fuqi me po atë bazë dhe me eksponent sa shuma e eksponentëve të këtyre fuqive. Duke përdorur shkronjat, këtë vetë e shkruajmë kështu: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, ku m, n janë numra natyrorë.

II. Herësi i dy fuqive me bazë të njëjtë

Shembulli 2

Le të pjesëtojmë dy fuqi me baza të njëjta, të ndryshme nga zero: $2^5 : 2^3$.

Kemi $2^5 : 2^3 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 = 2^2$. Por, $2^2 = 2^{5-3}$. Pra, $2^5 : 2^3 = 2^{5-3}$.



Mbani mend:

Herësi i dy fuqive me të njëjtën bazë (të ndryshme nga zero) është një fuqi me po atë bazë dhe me eksponent ndryshimin e eksponentëve të të pjesëtueshmit dhe të pjesëtuesit. Duke përdorur shkronjat, kjo vetë shkruhet: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, ku $a \neq 0$ dhe m, n janë numra natyrorë, ku $m \geq n$.

III. Fuqia e një fuqie

Shembulli 3

Të gjejmë vlerën e një fuqie të ngritur në fuqi: $(4^2)^3$.

Nëse e shënojmë 4^2 me a , kemi $(4^2)^3 = a^3 = a \cdot a \cdot a$. Pra $(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{(2+2+2)}$ d.m.th. $(4^2)^3 = 4^6$.

Por, $6 = 2 \cdot 3$. Kështu, $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3}$.



Mbani mend:

Fuqia e një fuqie është një fuqi me po atë bazë, që ka për eksponent prodhimin e eksponentëve të këtyre fuqive. Duke përdorur shkronjat, kjo vetë shkruhet: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, ku m, n janë numra natyrorë.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni vlerën e x në barazimet:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; b) $4^2 \cdot 4^x = 4^{10}$; c) $(-3)^x \cdot (-3)^3 = (-3)^6$; d) $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^5 = 7^x$.

2. Gjeni vlerën e x në barazimet:

a) $5^7 : 5^2 = 5^x$; b) $\frac{(-7)^x}{(-7)^2} = (-7)^4$ c) $\frac{(0,1)^5}{(0,1)^x} = (0,1)^3$.

3. Gjeni vlerën e x në barazimet:

a) $(3^5)^4 = 3^x$; b) $(2^3)^x = 2^{15}$; c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.



4. Në një tren ka 24 vagonë mallrash. Secili prej tyre përmban 25 kuti me kokrra kafeje. Çdo kuti përmban të paktën 2^9 kokrra. Sa kokrra kafeje ka në tren?



USHTRIME

1 Njehsoni në dy mënyra:

a) $2^2 \cdot 2^4$; b) $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; c) $(-0,5)^2 \cdot (-0,5)^3$.

2 Zbatoni vetinë për prodhimin e fuqive:

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$; b) $(3)^4 \cdot (3)^4$; c) $x^2 \cdot x^3$; d) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^7$.

3 Njehsoni në dy mënyra:

a) $3^3 : 3^2$; b) $(-2)^5 : (-2)^4$; c) $\frac{(0,1)^4}{(0,1)^2}$; d) $\frac{x^5}{x^2}$.

4 Zbatoni vetinë për herësin e fuqive:

a) $\frac{(-2)^3}{(-2)^2}$; b) $\frac{(0,5)^4}{(0,5)^3}$; c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3$; d) $(a-1)^{10} : (a-1)^6$.

5 Gjeni vlerën e x nga barazimet:

a) $(8^3)^x = 8^6$; b) $(5^x)^3 = 5^{12}$; c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; d) $(a^3)^2 = a^x$.

6 Shkruani në trajtën e një fuqie të vetme:

a) $(12^{12})^2$; b) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^5$; c) $(b^5)^3$; d) $(y^7)^7$.



7 Një bakter dyfishohet çdo gjysmë ore. Sa është numri i baktereve që lindin prej tij pas 8 orësh?

6.3 Vetë të fuqive (vazhdim)

A Kërkoni dhe zbuloni

Krahasoni $(4 \cdot 3)^2$ me $4^2 \cdot 3^2$; $\left(\frac{-4}{2}\right)^3$ dhe $\frac{(-4)^3}{2^3}$.

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

IV. Fuqia e një prodhimi

Shembulli 1

Njehsoni fuqinë e një prodhimi dy faktorësh $(2 \cdot 5)^3$.

Kemi $(2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)$ (sipas përkufizimit të fuqisë, zbatuar për bazën $2 \cdot 5$ dhe eksponentin 3).

$= 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$ (heqim kllapat, sipas vetisë së shoqërimit të shumëzimit)

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (sipas vetisë së ndërrimit të shumëzimit)

$= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5)$ (sipas vetisë së shoqërimit)

$= 2^3 \cdot 5^3$ (sipas përkufizimit të fuqisë) Pra, $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$.



Mbani mend:

Fuqia e një prodhimi është e barabartë me prodhimin e fuqive, me të njëjtin eksponent të faktorëve të prodhimit. Kjo vetë është e vërtetë edhe kur kemi më shumë se dy faktorë.

Pra, nëse n është numër natyror, atëherë çfarëdo qofshin numrat a , b , c , kemi

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Barazimi $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ mund të shkruhet edhe kështu: $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$. Kjo do të thotë se prodhimi i fuqive me eksponent të njëjtë është sa fuqia me po atë eksponent i prodhimit të bazave.

V. Fuqia e një herësi

Shembulli 2

Njehsoni herësin $\frac{6^4}{2^4}$.

Meqë $6 = 2 \cdot 3$, prandaj $6^4 = 2^4 \cdot 3^4$ (pse?) dhe $\frac{6^4}{2^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4}{2^4} = 3^4$.

Duke vënë re që $3 = \frac{6}{2}$, kemi nxjerrë që $\frac{6^4}{2^4} = \left(\frac{6}{2}\right)^4$.



Mbani mend:

Fuqia e një herësi është e barabartë me herësin e fuqive, me po atë eksponent, të të pjesëtueshmit dhe të pjesëtuesit. Pra, nëse n është numër natyror dhe a , b janë numra

çfarëdo ($b \neq 0$), atëherë: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Ky barazim mund të shkruhet edhe kështu: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. Pra, herësi i dy fuqive me eksponent të njëjtë është sa fuqia, me po atë eksponent e herësit të bazave.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Gjeni vlerën e x nga barazimet:

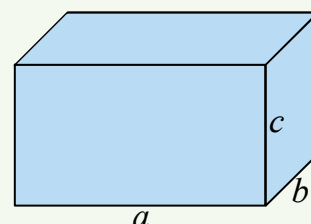
a) $(3 \cdot 4 \cdot 7)^5 = 3^5 \cdot 4^5 \cdot x^5$; b) $(2x)^3 = 2^3 \cdot 5^3$; c) $(-0,3 \cdot 4 \cdot 7)^3 = x^3 \cdot 4^3 \cdot 7^3$.

2. Gjeni vlerën e x nga barazimet:

a) $8^3 : 2^3 = x^3$; b) $\frac{24^5}{x^5} = 2^5$; c) $27^7 : 9^x = 3^7$; d) $20^x : 4^5 = 5^5$.



3. Përmasat e një kuboidi janë a ; b ; c . Sa herë zvogëlohet vëllimi i tij nëse secila nga përmasat zvogëlohet 2 herë?



USHTRIME

1 Zbatoni vetinë IV të fuqive për prodhimet:

a) $(2 \cdot 3 \cdot 4)^2$; b) $(3 \cdot a \cdot b)^4$; c) $[(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)]^3$.

2 Gjeni vlerën e fuqisë në dy mënyra:

a) $(5 \cdot 2 \cdot 4)^2$; b) $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^3$; c) $(5 \cdot 6 \cdot 7)^2$; d) $[(-2) \cdot (-1) \cdot (-4)]^3$.

3 Shkruani si fuqi të prodhimit:

a) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$; b) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$; c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-2,4)^4$; d) $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$.

4 Njihsoni në dy mënyra:

a) $(8 : 4)^2$; b) $(81 : 9)^3$; c) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$; d) $\left[\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-2\frac{1}{4}\right)\right]^3$.

5 Njihsoni në dy mënyra:

a) $12^2 : 3^2$; b) $8^3 : 4^3$; c) $36^3 : 12^3$; d) $(-4,5)^3 : (-1,5)^3$.

6 Njihsoni vlerën e shprehjeve:

a) $(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 + 20^2 : 4^2$; b) $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^3 : 3^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$; c) $(1 - 3)^2 \cdot (1 + 3)^2$.

7 Gjeni vlerën e x nga barazimet:

a) $3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^x = 30^3$; b) $6^4 \cdot x^4 = 24^4$; c) $2^x \cdot 7^x = 14^3$.

8 Gjeni vlerën e shprehjeve:

a) $5^4 : 5^3 + 28 : 2^2 - 7^5 : 7^4 + 6 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = \dots$;
 b) $3^6 : 3^4 - 2^8 \cdot 2^2 : 2^7 - 2^0 = \dots$;
 c) $(3^4 : 3^3 - 2 + 3^8 \cdot 3^5 : 3^{12})^0 = \dots$

6.4 Trajta shkencore e shkrimit të numrit

A Kërkoni dhe zbuloni

Largësia maksimale e Plutonit nga Toka është $7,38 \cdot 10^{12}$ m.

Një fletë ari është e hollë $1,25 \cdot \frac{1}{10^7}$ m.

Shkruani dy numrat e dhënë në formë të zakonshme.

Përdorni kalkulatorin dhe krahasoni shfaqjen e numrave në të me numrat e dhënë.

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.



B Vrojtoni dhe mësoni

Në shumë degë të ndryshme të shkencës, si: në fizikë, kimi, astronomi, teknikë etj., hasim numra shumë të mëdhenj apo shumë të vegjël, të cilët shkruhen e lexohen me vështirësi. P.sh.: largesa Tokë-Diell është 150 000 000 km (njëqind e pesëdhjetë milionë kilometra) apo rrezja e dritës depërton në xhamin e dritares për 0,00 000 000 001 sekonda (një e njëqindmiliardta pjesë e sekondës).

Vargu i fuqive të numrit 10 na ndihmon për të shkruar e lexuar këto numra. P.sh.: numrat e mësipërm mund të shkruhen:

$$150\,000\,000\text{ km} = 1,5 \cdot 10^8\text{ km}$$

$$0,00\,000\,000\,001\text{ sek} = \frac{1}{10^{11}}\text{ sek}$$

Një mënyrë e tillë e të shkruarit të numrit quhet shkrim i numrit në **trajtë shkencore (në formë standarde)**.



Mbani mend:

Numri shkruhet në trajtë shkencore nëse ai paraqitet në trajtën $n = a \cdot 10^m$ ose në trajtën $n = \frac{a}{10^m}$, ku $1 \leq a < 10$ dhe $m \in \mathbb{N}$. Si rregull, a paraqitet në trajtën e një numri dhjetor.

Shembulli 1

Masa e atomit të hidrogjenit është 0,000 000 000 000 000 000 000 017 g. Në formë standarde ajo shkruhet $\frac{1,7}{10^{24}}$ g. Në këtë rast $a = 1,7$ dhe $m = 24$.

Numrat e shkruar në formë standarde mund të shumëzohen e pjesëtohen mjaft thjesht.

Shembulli 2

$$\text{a) } (3,1 \cdot 10^3) \cdot (2,3 \cdot 10^4) = (3,1 \cdot 2,3) \cdot 10^{3+4} = 7,13 \cdot 10^7.$$

$$\text{b) } \frac{4,8 \cdot 10^2}{1,5 \cdot 10^8} = \frac{4,8}{1,5} \cdot \frac{1}{10^6} = 3,2 \cdot \frac{1}{10^6}$$

Nëse gjatë veprimeve përftohet një numër në formë jostandarde, ai duhet të kthehet në formë standarde.

Shembulli 3

$$(8 \cdot 10^3) \cdot (4,5 \cdot 10^4) = 8 \cdot 4,5 \cdot 10^{3+4} = 36 \cdot 10^7 = 3,6 \cdot 10^8.$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Ylli më i afërt i Tokës është Alfa Centauri. Largesia e tij nga Toka është $2,06 \cdot 10^5$ njësi astronomike. Një njësi astronomike është largesia Tokë-Diell ($150\,000\,000$ km). Sa është largesia nga Toka deri në yllin e mësipërm në kilometra? Shkruani numrin në formë standarde.
- Numrat që vijojnë paraqitini si prodhim apo raport të një numri të plotë me fuqi të numrit 10.
a) 2 100; b) 5 000; c) - 80 000; d) 0,007; e) 0,000 031.
- Sa sekonda zgjat një ndeshje futbolli? Shkruajeni në formë standarde.

USHTRIME

1 Shkruani në formë standarde numrat e mëposhtëm:

- a) Masa e Tokës është 6 000 000 000 000 000 000 000 tonë.
b) Në një gram hidrogjen ka 600 000 000 000 000 000 000 000 atome.
c) Largesën prej 1 km, rrezja e dritës e përshkon për $\frac{1}{300000}$ sek.

2 Kryeni veprimet:

a) $(1,25 \cdot 10^6) \cdot (4 \cdot 10^{12})$; b) $(4,2 \cdot \frac{1}{10}^2) \cdot (3 \cdot 10^{12})$; c) $(6,2 \cdot 10^2) \cdot (5 \cdot 10^4)$.

3 Gjeni vlerat e shprehjeve të mëposhtme, duke i shprehur si numra racionalë.

a) $5,2 \cdot 10^5$; b) $2,7 \cdot \frac{1}{10}^2$; c) $9,01 \cdot 10^4$; d) $2,87 \cdot 10^6$.

4 Më poshtë janë dhënë diametrat e atomeve të disa elementeve kimike (në metra). Shkruajini ato si numra dhjetorë.

Elementi kimik	Hidrogjen	Helium	Oksigjen
Diametri i atomeve	$2,47 \cdot \frac{1}{10^{10}}$	$2,18 \cdot \frac{1}{10^{10}}$	$3,39 \cdot \frac{1}{10^{10}}$

5 Plotësoni tabelën:

n	0	1	2	3	4
10^n					

a) Për ç'vlera natyrore të n , kemi $10^n > 15$? b) Për ç'vlera natyrore të n , kemi $10^n < 0,02$?

6 Gjeni n nëse:

a) $10^n = 10$; b) $10^n = 100$; c) $\frac{1}{10^n} = 0,1$; d) $\frac{1}{10^n} = 0,01$.

7 Gjeni nëse n është numër tek apo çift:

a) $(-10)^n > 0$; b) $(-10)^n < 0$.

8 Sasia e rekomanduar për nevojat ditore me vitaminë B12 për një të rritur është $2,4 \cdot \frac{1}{10^4}$ g, ndërsa për jodin është $1,5 \cdot \frac{1}{10^4}$ g. Cila prej këtyre dy sasive është më e madhe?

6.5 Rrënja katrore e numrave jonegativë

A Kërkoni dhe zbuloni

Miri do të shtrojë me pllaka katrore një sipërfaqe të dhomës së tij. Ai llogariti se i duhen 100 pllaka me sipërfaqe 100 cm^2 . Sa duhet të jetë brinja e pllakës në këtë rast? Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Nëse njihni bazën dhe eksponentin e fuqisë, mund të gjeni fuqinë. Por në shumë problema (jetësore apo matematike) kërkohet të bëhet një veprim i kundërt: të gjendet baza e fuqisë, kur njihen eksponenti e fuqia. Ky quhet **veprim i nxjerrjes së rrënjës**.

Do të shqyrtojmë këtë problem tani për rastin kur fuqia është numër jonegativ dhe eksponenti është 2.

Dini që $5^2 = 25$.

Në këtë rast thuhet: “Numri 5 është rrënja katrore e numrit 25” dhe shënohet $\sqrt{25} = 5$.

Meqenëse $10^2 = 100$, numri 10 është rrënjë katrore e numrit 100 dhe përdoret shënimi $\sqrt{100} = 10$.



Mbani mend:

Rrënja katrore e numrit jonegativ a quhet numri që katrorin e tij e ka a .

Ky numër shënohet $\sqrt{a}$ (lexohet: rrënja katrore e a).

Nëse $\sqrt{a} = b$ atëherë $b^2 = a$ dhe anasjellas.

Shembulli 1

a) $\sqrt{1} = 1$ sepse $1^2 = 1$; b) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ sepse $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; c) $\sqrt{0,01} = 0,1$ sepse $(0,1)^2 = 0,01$.

Rrënja katrore e numrave jonegativë mund të gjendet në bazë të tabelave të posaçme, ose duke përdorur kalkulatorin, që ka një tast të veçantë $[\sqrt{\quad}]$ për gjetjen e saj.

Disa veti të rrënjëve katrore

Nëse a, b janë numra pozitivë, atëherë:

I. $\sqrt{a^2} = a$, p.sh.: $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$;

II. $\sqrt{\cdot} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, p.sh.: $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$;

III. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, p.sh.: $\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Gjeni vlerën e rrënjëve katrore:

a) $\sqrt{36}$; b) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; c) $\sqrt{0}$; d) $\sqrt{\frac{1}{36}}$.

2. A janë të sakta shënimet?

a) $\sqrt{169} = 13$; b) $\sqrt{10^4} = 10^2$; c) $\sqrt{0,0001} = 0,01^2$.

3. Gjeni vlerën e rrënjëve katrore:

a) $\sqrt{\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2}$; b) $\sqrt{16 \cdot 49}$; c) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; d) $\sqrt{36 \cdot 49 \cdot 200}$.



4. Syprina e një kopshti katror u zmadhua 3 herë dhe në të u krijua një basen me syprinë 11 m^2 . Mbetën për t'u mbjellë 37 m^2 . Sa ishte brinja e kopshtit katror fillestar?

USHTRIME

1 Gjeni rrënjët katrore të numrave:

1; 4; 9; 16; 25; 49; 64; 81; 100.

2 Gjeni: $\sqrt{4 \cdot 100}$; $\sqrt{36 \cdot 100}$; $\sqrt{81 \cdot 100}$.

3 Gjeni: $\sqrt{\frac{4}{81}}$; $\sqrt{\frac{36}{25}}$; $\sqrt{\frac{9}{64}}$.

4 Gjeni: $\sqrt{121}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{900}$.

5 A janë të vërteta barazimet?

a) $\sqrt{169} = 13$; b) $\sqrt{196} = 14$; c) $\sqrt{225} = 15$; d) $\sqrt{324} = 17$?

6 Me kalkulator gjeni rrënjën katrore të përafërt të numrave:

2; 3; 5; 7; 20; 300; 1000.

7 Gjeni rrënjët katrore të fuqive:

7^2 ; 10^2 ; 10^4 ; 6^4 ; x^4 .

8 Shkruani dy numra natyrorë dhe fqinjë, ndërmjet të cilëve të ndodhet numri:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{31}$; d) $\sqrt{90}$.

9 A është e vërtetë fjalia: “Rrënja katrore e shumës së dy numrave jonegativë është e barabartë me shumën e rrënjëve katrore të këtyre numrave”?

10 Dymbëdhjetë pllaka katrore kanë një syprinë prej 600 cm^2 .

a) Vlerësoni gjatësinë e brinjës së një pllake.

b) Përdorni kalkulatorin për të gjetur gjatësinë e përafërt të brinjës së një pllake.



6.6 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

<i>Tashmë kemi mësuar</i>	<i>Provoni të zgjidhni</i>
Leximin dhe shkrimin e fuqive me eksponent numër natyror.	1. Lexoni fuqitë. Tregoni bazën dhe eksponentin: $3^3; 4^2; 7^4; 5^{-4}; (0,5)^2; (-5)^2; (-0,3)^3; \left(\frac{1}{2}\right)^2.$ 2. Shkruani si fuqi: a) katër në fuqi të tretë; b) minus pesë në fuqi të katërt; c) shtatë në katror; d) minus dy presje pesë në katror.
Njehsimin e vlerës së fuqisë me eksponent numër natyror dhe bazë numër racional.	3. Paraqitni numrat nëpërmjet fuqive: a) me bazë 2: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; b) me bazë $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$. 4. Njehsoni: a) $2 \cdot 3^2$; $(2 \cdot 3)^2$; $-2 \cdot 3^3$. b) $10^2 : 5^2$; $8^2 : 4^2$. c) $(2^3)^2$; $[(-4)^2]^2$. 5. Plotësoni barazimet duke përdorur vetitë e fuqive: a) $a^5 : a^3 = \dots$; b) $a^2 \cdot a^4 = \dots$; c) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = \dots$; d) $(a \cdot b)^3 = \dots$; e) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^4 = \dots$; f) $(b^3)^3 = \dots$.
Dallimin e rasteve kur vlera e fuqisë është numër pozitiv apo negativ, në varësi të bazës dhe të eksponentit të fuqisë.	6. Njehsoni: a) $(+4)^2$; $(+6)^3$; $(+7)^4$. Si është shenja e këtyre fuqive? b) $(-3)^2$; $(-8)^4$; $(-1)^6$. Si është shenja e këtyre fuqive? c) $(-1)^3$; $(-2)^5$; $(-4)^3$. Si është shenja e këtyre fuqive? 7. Njehsoni në dy mënyra: a) $\left(\frac{-12}{3}\right)^2$; b) $\left(-\frac{25}{5}\right)^3$; c) $\left(\frac{8}{-2}\right)^4$; d) $(12 : 6)^3$.

Shkrimin e numrit në trajtë shkencore.	8. Shkruani, duke përdorur fuqi me bazë 10. a) Numrin e milimetra në 1 km. b) Numrin e milimetra katrorë në një syprinë 100 m². c) Largesën e Jupiterit nga Dielli: 770 000 000 km. d) Rrezën e bërthamës së një atomi: 0,00000000000003 cm. e) Masën e planetit Mërkur: 330 000 000 000 000 000 000 000 kg.
Interpretimin e rrënjës katrore si veprim të kundërt të ngritjes në katror.	9. Syprina e një pllake në formë katrore është 144 cm². Sa është brinja e pllakës? 10. Zgjidhni ekuacionin në bashkësinë e numrave racionalë jonegativë: a) $x^2 = 1600$; b) $x^2 = 0,09$; c) $x^2 = 0,64$.
Njehsimin e rrënjës katrore duke bërë prova dhe duke përdorur kalkulatorin.	11. Gjeni: $\sqrt{4 \cdot 25}$; $\sqrt{16 \cdot 100}$; $\sqrt{9 \cdot 400}$. 12. Gjeni: $\sqrt{\frac{25}{4}}$; $\sqrt{\frac{81}{36}}$; $\sqrt{\frac{121}{144}}$.
Përdorimin e kalkulatorit për njehsimin e fuqisë dhe rrënjës katrore.	13. Me ndihmën e kalkulatorit njehsoni rrënjën katrore në një vlerë të përafërt: $\sqrt{30}$; $\sqrt{160}$; $\sqrt{94}$.
Modelimin dhe zgjidhjen e problemave duke përdorur fuqitë.	14. Temperatura e Diellit në sipërfaqen e tij është $1,5 \cdot 10^7$ °C. Shkruajeni si një numër të zakonshëm. 15. Gjatë pushimeve të verës duhet të lexosh 6 libra. Gjyshi të propozon dy mënyra shpërblimi: - 4 euro për çdo libër të lexuar; - 1 euro për leximin e të parit; dyfishin për të dytin; katërfishin për të tretin; tetëfishin për të katërtin e kështu me radhë. Ke vendosur t'i lexosh të gjithë librat. Ç'mënyrë shpërblimi është më e mirë për ty? 16. Hapësira e një USB-je mban deri 128 GB me të dhëna. Disku i kompjuterit të Erës ka 140 GB të dhëna. Sa USB të tilla duhen që të hidhet në to i gjithë informacioni i diskut?

6.7 Vlerësim

Koha: 45 minuta

1 Gjeni fuqitë me bazë 10 dhe me eksponent:

- a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

(2 pikë)**2** Paraqitni nëpërmjet fuqive me bazë 2 numrat:

- a) 1; 2; 4; 8; 16; b)
- $\frac{1}{2}$
- ;
- $\frac{1}{4}$
- ;
- $\frac{1}{8}$
- ;
- $\frac{1}{16}$
- .

(4 pikë)**3** A janë të vërteta apo të gabuara barazimet?

- a)
- $3^3 + 3^1 = 3^4$
- ; b)
- $4 \cdot 4^2 = 4^2$
- ; c)
- $7^4 \cdot 7^3 \cdot 7 = 7^8$
- ; d)
- $3 \cdot 3^0 \cdot 3 = 3^3$
- .

(4 pikë)**4** Krahasoni:

- a)
- 1^5
- me
- 5^1
- ; b)
- 22^1
- me
- 1^{22}
- ; c)
- 10^0
- me
- 0^{10}
- ; d)
- 0^7
- me
- 7^0
- .

(4 pikë)**5** Njihsoni vlerat e shprehjeve në dy mënyra:

- a)
- $10^2 : 5^2$
- ; b)
- $8^2 : 4^2$
- ; c)
- $(7^2)^3 : (7^3)^2$
- ; d)
- $(3^2)^3 : (3^2)^3$
- .

(4 pikë)**6** Shkruani si prodhim të një numri natyror me një fuqi të dhjetës apo me të anasjellën e një fuqie të dhjetës, numrin që tregon:

- a) largesën Tokë-Diell: 150 000 000 km;
-
- b) masën e një elektroni: 0,000 000 000 000 000 000 000 911 g;
-
- c) rrezen e Tokës në ekuator: 6 378 km;
-
- d) largesën e Tokës me yllin e dytë më të afërt: 22 000 000 000 000 km.

(4 pikë)**7** Shkruani si një fuqi e vetme shprehjet:

- a)
- $12^{10} : 12^4 : 12^6$
- ; b)
- $(3^6)^3 : [(3^2)^2 \cdot (3^3)^0]$
- .

(2 pikë)**8** Korrigjoni, nëse është e nevojshme:

- a)
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4^3$
- ; b)
- $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4$
- ;
-
- c)
- $(1,2) \cdot (1,2) = 1,2$
- ; d)
- $(-1)^4 = 4 \cdot (-1)$
- .

(4 pikë)**9** Gjeni: $\sqrt{121 \cdot 100}$; $\sqrt{144 \cdot 100}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{900}$.**(4 pikë)****10** Njihsoni me ndihmën e kalkulatorit vlerën e përafërt të rrënjëve:

- $\sqrt{120}$
- ;
- $\sqrt{124}$
- ;
- $\sqrt{500}$
- ;
- $\sqrt{2400}$
- .

(4 pikë)

7

Raporte dhe përpjesëtime

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- dallon numërorët që formojnë përpjesëtim;
- dallon madhësitë e drejta përpjesëtimore;
- cakton të katërtën përpjesëtimore në përpjesëtimet e dhëna;
- zbaton rregullën e thjeshtë të treshit, për të caktuar vlerën e së panjohurës te përpjesëtimet;
- vlerëson dhe kalkulon përqindjen përmendsh dhe me metoda llogaritëse;
- identifikon shkallën e vizatimit (koeficientin e proporcionit) te figurat e ngjashme dhe në hartat gjeografike të qyteteve, shteteve;
- zgjidh problema nga jeta e përditshme, duke përdorur numra përpjesëtimorë dhe përqindjet.



Fjalë kyçe:

raport, herës, numër dhjetor, përqindje, përpjesëtim, kufiza të jashtme, kufiza të brendshme, e katërta përpjesëtimore, madhësitë e drejta përpjesëtimore, rregulla e treshit, shkalla e zmadhimit, e zvogëlimit.

A E DINI SE...?



Raporti i artë është një nga njohuritë matematikore që ka magjepsur matematikanët për të paktën 2400 vjet. Dy madhësi janë në raportin e artë, nëse raporti i shumës së dy madhësive me madhësinë më të madhe është i barabartë me raportin e madhësisë së madhe me të voglën. Raporti i artë është një konstante matematikore, përafërsisht 1,6180339887. Në Greqinë antike, matematikanët filluan ta studionin raportin e artë për shkak se hasej dendur në gjeometri. Më vonë, u zbulua se i njëjti raport gjendej i shprehur në shpërndarjen e degëve përgjatë kërcejve të bimëve dhe të damarëve në gjethe; te skeletet e kafshëve dhe degëzimin e venave dhe të

nervave të tyre; në proporcionin e përbërjeve kimike dhe në gjeometrinë e kristaleve, madje edhe në përdorimin e proporcionit në veprat artistike. Shumë muzikantë kanë kompozuar vepra, duke përdorur raportin e artë në kombinimin e notave muzikore.



7.1 Kuptimi i raportit

A Kërkoni dhe zbuloni

Në një klasë ka 15 vajza dhe 10 djem.

Sa më i madh është numri i vajzave nga numri i djemve?

Sa herë më i madh është numri i vajzave nga numri i djemve?

Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Për krahasimin e numrave dhe të madhësive përdorim dy mënyra: njehsojmë ndryshimin e tyre **ose** njehsojmë herësin e tyre. Në rastin e parë marrim përgjigje për pyetjen: **me sa njësi** një numër është më i madh (ose më i vogël) se një numër tjetër? Në rastin e dytë marrim përgjigje për pyetjen: **sa herë** njëri nga numrat është më i madh (ose më i vogël) se tjetri, apo ç'pjesë të njërit numër përbën tjetri?

Në shembullin e mësipërm themi se në klasë **ka 5 vajza më shumë** se djem. Por mund të themi që vajza **ka 1,5 herë më shumë** se djem, pasi $\frac{15}{10} = 1,5$.



Mbani mend:

Herësin e dy numrave e quajmë raport (përpjesë) të tyre. Raporti tregon se sa herë më i madh është numri i parë nga i dyti, apo ç'pjesë të të dytit përbën numri i parë. Raporti mund të shprehet si thyesë e zakonshme, si numër dhjetor apo si përqindje.

Nëse vlerat e dy madhësive janë shprehur me të njëjtën njësi matjeje, atëherë raportin e tyre e quajmë edhe raport të këtyre madhësive (raport gjatësish, raport syprinash, raport masash etj.).

Shembulli 1

Gjatësia e një rruge është 240 km. Janë asfaltuar 180 km të kësaj rruge. Ç'pjesë e rrugës është asfaltuar?

Zgjidhje

Për të gjetur se cila pjesë e rrugës është asfaltuar, marrim raportin $180 : 240$. E shkruajmë këtë raport si thyesë dhe e thjeshtojmë atë $\frac{180}{240} = \frac{3}{4}$. Këtë thyesë mund ta shkruajmë si numër dhjetor (0,75) ose si përqindje (75%).



Mbani mend:

Nëse vlerat e dy madhësive janë shprehur me njësi të ndryshme matjeje, për gjetjen e raportit të këtyre dy madhësive duhet t'i kthejmë në të njëjtën njësi.

Shembulli 2

Masa e një tornoje (makinë e posaçme e pajisur me mjete prerëse) është 9,6 kv, kurse masa e elektromotorit të saj është 36 kg. Gjeni raportin e masës së elektromotorit me masën e tornos.

Zgjidhje

Shprehim masën e tornos në kg. Marrim $9,6 \text{ kv} = 960 \text{ kg}$. D.m.th., raporti i masës së elektromotorit me masën e tornos është: $36 : 960 = \frac{36}{960} = \frac{3}{80} = 0,0375 = 3,75\%$.

Shpesh kemi të bëjmë me raport madhësish të ndryshme. Në këtë rast merret një madhësi e re, si për shembull **shpejtësia**, e cila është raporti i rrugës me kohën. Nëse rrugën e matim në km, kurse kohën në orë, atëherë shpejtësia do të shprehet me km në orë. Nëse rruga matet në metra, kurse koha në sekonda, atëherë shpejtësia shprehet në metra në sekondë.

C Ushtroni duke zbatuar

- Një tel është ndarë në dy copa. Copa e parë e ka gjatësinë 9 m, kurse e dyta e ka gjatësinë 144 m. Gjeni:
 - Ç'pjesë të telit përbën copa e parë (copa e dytë)?
 - Ç'pjesë të copës së dytë përbën copa e parë?
- Syprina e drejtkëndëshit është $22,05 \text{ m}^2$. Gjatësia e këtij drejtkëndëshi është 10,5 m. Gjeni raportin e gjatësisë së drejtkëndëshit me gjerësinë e tij. Shkruani raportin e anasjellë. Ç'tregon ai?
- Krijoni dy raporte, duke përdorur të dhënat e mëposhtme. Në çdo rast sqaroni kuptimin e madhësisë që formohet dhe tregoni me çfarë njësie matet ajo.
 - Për 3 orë Mira lexoi 36 faqe.
 - Me 50 euro u blenë 2 m mëndafsh.
 - Duke bërë 10 hapa, Gimi bëri 4 m.
 - Për 5 minuta printeri shtypi 30 faqe.

USHTRIME

- Për nxënësit në klasën tuaj përdorni raportin për të krahasuar:
 - numrin e djemve me numrin e vajzave; b) numrin e vajzave me numrin e djemve.
- Gjeni, duke përdorur figurën.
 - Ç'pjesë e katrorëve është me pika?
 - Ç'pjesë e katrorëve është e ngjyrosur?
 - Shkruani një raport për të krahasuar pjesën e ngjyrosur me pjesën me pika.
 - Shkruani një raport për të krahasuar numrin e katrorëve të ngjyrosur me numrin e katrorëve me pika.
- Qumështi u nda në tre bidonë. Në të parin hodhën 0,1 të tij, në të dytin hodhën 0,3 të tij, kurse në të tretin pjesën që mbeti. Ç'tregojnë raportet?
 - i 0,1 ndaj 0,3; b) i 0,1 ndaj 0,6; c) i (0,3 + 0,1) ndaj 0,6.
- Gjeni raportin e:
 - 3 km ndaj 750 m; b) 300 m ndaj 2,1 km; c) 700 g ndaj 1 kg; d) 10 min ndaj 10 orë.
- Sipërfaqja e Tokës është rreth 510 milionë km^2 . 361 milionë km^2 janë të mbuluara me ujë, kurse 149 milionë km^2 janë tokë. Gjeni raportin e pjesës së mbuluar me ujë me pjesën e mbuluar me tokë.
- Rrezja ekuatoriale e Tokës është 6378 km, kurse ajo polare 6357 km. Gjeni raportin e tyre.

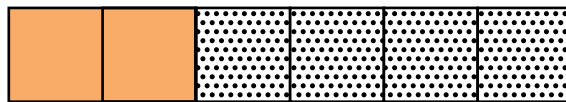
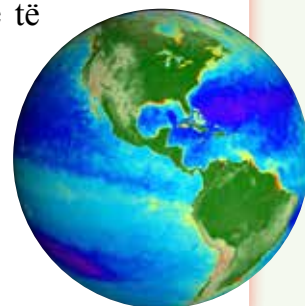


Fig. 7.1



7.2 Zbatime të raportit

A Kërkoni dhe zbuloni

Shkolla ka 72 nxënës në klasat e pesta dhe 48 nxënës në klasat e gjashta. Për ta u arrit të siguroheshin vetëm 50 bileta kinemaje. Si mund të ndahen këto bileta midis nxënësve të klasave të pesta dhe klasave të gjashta në mënyrë sa më asnjane?

B Vrojtoni dhe mësoni

I. Vetia themelore e raportit

Në figurën 7.2, është paraqitur një drejtkëndësh, në të cilin raporti i lartësisë me bazën është $1 : 3$. Vlera e këtij raporti nuk varet nga njësia me të cilën është matur lartësia dhe baza.

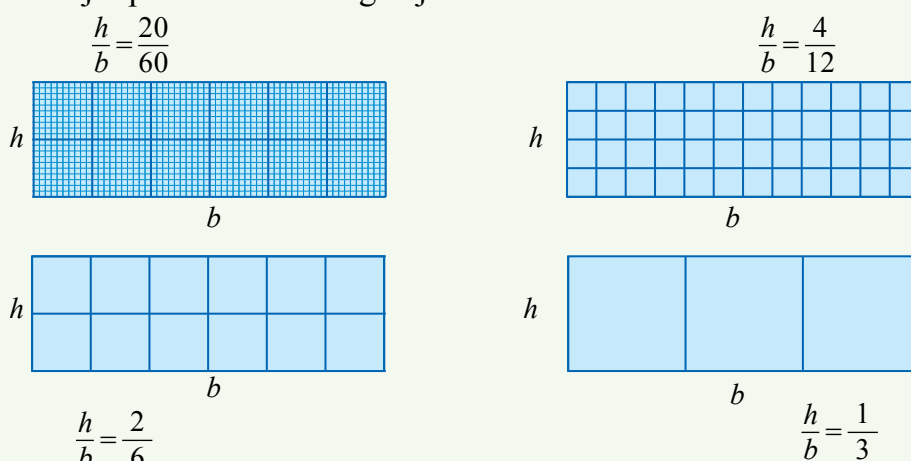


Fig. 7.2

Raporti $a : b$ është thyesa $\frac{a}{b}$, për të cilën është e vërtetë **vetia themelore e thyesave**.



Mbani mend:

Nëse shumëzojmë apo pjesëtojmë të dy gjymtyrët e raportit me të njëjtin numër, të ndryshëm nga zero, do të marrim një raport të ri të barabartë me të parin.

P.sh.: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = \frac{0,3}{0,2} = \frac{0,6}{0,4} = \frac{90}{60} = \dots$ Prandaj $9 : 6 = 3 : 2 = 0,3 : 0,2 = 0,6 : 0,4 = 90 : 60$.

II. Ndarja në raport të dhënë

Në jetën praktike, si për shembull, gjatë përgatitjes së përzierjeve në recetat mjekësore, apo të gatimit, gjatë ndarjes së të ardhurave etj., shpesh është e nevojshme të ndajmë një madhësi në pjesë, raporti i të cilave është i barabartë me një numër të dhënë.

Për këto raste thuhet që **duhet ndarë madhësia në një raport të dhënë**.

Shembull

Për të bërë detyrat e Matematikës dhe të Gjuhës, Zamiri harxhoi 1,4 orë. Ai e ndau kohën midis këtyre dy detyrave në raportin $4 : 3$. Sa orë harxhoi ai për secilën lëndë?

Zgjidhje

Duhet të ndajmë kohën prej 1,4 orë në raportin $4 : 3$. Gjithsej kemi $4 + 3 = 7$ pjesë.

Një pjesë i takon $\frac{1,4}{7}$ orë, d.m.th. 0,2 orë.

Për detyrat e Matematikës janë harxhuar $4 \cdot 0,2 = 0,8$ orë.

Për detyrat e Gjuhës janë harxhuar $3 \cdot 0,2 = 0,6$ orë.

C Ushtroni duke zbatuar

- Shkruani disa raporte të barabarta me $\frac{3}{4}$; 0,5: 5.
- Secili nga raportet e mëposhtme krahason numrin e rrathëve të zinj me numrin e rrathëve të bardhë. Vizatoni një grup rrathësh të zinj dhe rrathësh të bardhë për të treguar raportin:
 - 3 : 2;
 - 1 : 5;
 - 7 : 3;
 - 5 : 9.
- Zëvendësoni raportin e mëposhtëm me raport numrash të plotë.
 - 0,5 : 1,5;
 - 4,5 : 2,7;
 - $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$;
 - $1\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$.
- Një aliazh (lidhje metalike) bakri dhe zinku ka masën 2 kg 550 g. Masat e bakrit dhe zinkut në të janë në raportin 9 : 8. Sa është masa e zinkut në aliazh?

USHTRIME

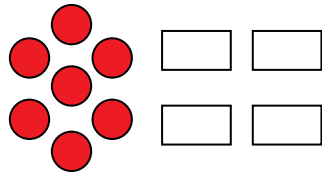
- Mësuesi korrigjoi 45 teste nxënësish dhe i mbetën pa korrigjuar edhe 75.
 - Sa herë më i madh është numri i testeve të pakorrigjuara se sa i atyre të korrigjuara?
 - Ç'pjesë të sasisë së përgjithshme të testeve përbëjnë të korrigjuarat?
 - Sa % e testeve janë korrigjuar?
- Shkruani disa raporte të barabarta me:
 - $\frac{4}{7}$;
 - $\frac{1}{10}$;
 - 0,35;
 - 4.
- Thjeshtoni raportin.
 - 16 : 24;
 - 121 : 33;
 - 1,4 : 2,1;
 - 1,5 : 0,6.
- Në çfarë raporti janë brinjët e:
 - e një katrori?
 - e një trekëndëshi barabrinjës?
 - e një rombi?
- Brinjët e drejtkëndëshit janë 60 cm dhe 80 cm.
 - Vizatoni këtë drejtkëndësh në fletore në shkallën 1 : 10.
 - Matni diagonalen e drejtkëndëshit në fletore dhe gjeni gjatësinë e diagonales së drejtkëndëshit të dhënë.
- Skuadra A nga 18 ndeshje ka fituar 7, kurse skuadra B nga 12 ndeshje ka fituar 5. Cila skuadër ka rezultatin më të mirë?
- Segmentet [AC] dhe [AB] kanë raportin 3 : 5.
Me sa është i barabartë raporti i gjatësive: a) AC : CB? b) CB : AB?
 
- Në figurë janë dhënë rrathë dhe drejtkëndësha. Gjeni:
 - raportin e numrit të rrathëve me numrin e drejtkëndëshave;
 - raportin e numrit të drejtkëndëshave me numrin e rrathëve.
- Raporti i gjatësisë së dhomës me gjerësinë e saj është 5 : 4.
 - Gjeni syprinën e dhomës, nëse gjatësia e saj është 6 m.
 - Gjeni syprinën e dhomës, nëse gjatësia është për 0.8 m më e gjatë se gjerësia.

Fig. 7.3

Fig. 7.4



10 Lumi Vollga, me një gjatësi 3531 km është lumi më i gjatë në Europë, ndërsa lumi Nil me gjatësi 6350 km është lumi më i gjatë në botë. Gjeni raportin e gjatësisë së lumit Vollga me gjatësinë e lumit Nil. Shprehni raportin në përqindje.

7.3 Shprehja e raportit në përqindje

A Kërkoni dhe zbuloni

Në një fshat kanë të drejtë votimi 350 banorë. Në ditën e zgjedhjeve votuan vetëm 190 prej tyre.

– Në votime morën pjesë $\frac{19}{35}$ e votuesve, – tha Bardha.

– Jo, në votim morën 54% e tyre, – tha Agimi.

Kush ka të drejtë? Diskutoni.



B Vrojtoni dhe mësoni

Dimë që një numër thyesor kthehet në numër dhjetor dhe në përqindje. Kështu edhe raporti mund të shprehet me numër dhjetor dhe me përqindje.



Mbani mend:

Për të kaluar nga një thyesë dhjetore në përqindje duhet ta shumëzohjmë këtë thyesë me 100%. (P.sh. $0,35 = 0,35 \times 100\% = 35\%$).

Shembulli 1

Nga 2150 televizorë të një marke, për një vit, u desh të riparoheshin 49 copë, kurse nga 725 televizorë të një marke tjetër, për atë vit, u desh të riparoheshin 31 copë. Për cilën markë përqindja e televizorëve me defekt është më e madhe?

Zgjidhje

Raporti i televizorëve me defekt, me sasinë e përgjithshme të tyre, për markën e parë është $\frac{49}{2150}$, kurse për markën e dytë është $\frac{31}{725}$. I kthejmë këto thyesa në numra dhjetorë (duke bërë pjesëtimin e numëruesit me emëruesin) dhe pastaj në përqindje.

Në këtë mënyrë $\frac{49}{2150} \approx 0,022$ dhe $\frac{31}{725} \approx 0,042$. D.m.th. $\frac{49}{2150} \approx 2,2\%$ dhe $\frac{31}{725} \approx 4,2\%$. Përqindja e televizorëve me defekt është më e madhe për markën e dytë.

Shembulli 2

Sipas ligjeve të një vendi, të ardhurat e çdo njeriu taksohen sipas “tatimit mbi të ardhurat”, që është në masën 13%. Çfarë shume paguan si tatim një shtetas që fiton 2700 euro?

Zgjidhje

Gjejmë 13% të 2700. Për këtë shumëzohjmë 2700 me 13%. Por $13\% = \frac{13}{100} = 0,13$. Shuma e tatimit është $2700 \cdot 0,13 = 351$ euro.



Mbani mend:

Për të kthyer përqindjet në thyesa dhjetore duhet që numrin që qëndron para shenjës % ta pjesëtojmë me 100.

P.sh.: $65\% = \frac{65}{100} = 0,65$ etj.

Për gjetjen e përqindjes së caktuar të një numri të dhënë mund të përdorim kalkulatorin.

a) Nëse kalkulatori ka tastin e posaçëm, veprojmë duke shtypur tastet, siç tregohet në figurën 7.5.



Fig. 7.5

b) Nëse kalkulatori nuk e ka tastin, veprojmë si tregohet në figurën 7.6.



Fig. 7.6

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Lexoni fjalinë, duke e shprehur thyesën në përqindje:
 - mbushni me benzinë $\frac{2}{5}$ e rezervuarit;
 - masa e rrushit të thatë përbën $\frac{6}{25}$ e masës së rrushit të freskët.
- Në testimin në matematikë, nga 150 nxënës të klasave të shtata, 18 morën 5, dhe 66 morën 4. Sa për qind e nxënësve nuk morën as 5 as 4?
- Një këmishë kushton 40 euro. Sa do të kushtojë ajo, nëse çmimi rritet 35%?
- Nga qumështi merret 22% ajkë, kurse nga ajka merret 18% gjalpë. Sa gjalpë merret nga 10 litra qumësht?



USHTRIME

1 Shprehni si numër dhjetor:

- a) 21%; b) 56%; c) 78%; d) 2%.

2 Në figurë janë dhënë disa rrathë. Gjeni në përqindje:

- pjesën e rrathëve të ngjyrosur;
- pjesën e rrathëve të pangjyrosur;
- raportin e rrathëve të ngjyrosur me ata të pangjyrosur.

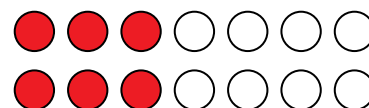


Fig. 7.7

3 Vizatoni segmentin [AB] me gjatësi 5 cm. Vizatoni pastaj segmentet, gjatësitë e të cilëve janë sa 80%; 150%; 220% e gjatësisë së AB.

4 Sa për qind të çmimit fillestar të mallit përbën çmimi i ri, nëse:

- a) malli shtrenjtohet me 40%; b) malli lirohet me 20%.

5 Lëngu i frutave u ul me 15%. Sa kushton tani 1 litër lëng frutash që më parë kushtonte 80 centë?

6 Për shkeljen e rregullave të qarkullimit, shoferi duhet të paguajë, brenda afatit, gjobën prej 25 eurosh. Çdo ditë përtej afatit shuma që duhet të paguajë rritet me 2% të gjobës. Sa i duhet të paguajë atij nëse e kalon afatin me 7 ditë?

7 Maja e Gjeravicës ka një lartësi 2656 m mbi nivelin e detit, ndërsa mali i Korabit ka një lartësi 2764 m. Gjeni raportin e lartësisë së malit të Gjeravicës me lartësinë e Korabit. Shprehni raportin në përqindje.

7.4 Përpjesëtimet

A Kërkoni dhe zbuloni

– Raporti i pjesës së ngjyrosur me pjesën e pangjyrosur është $\frac{1}{2}$, – thotë Zana.

– Jo, – thotë Mira, – raporti i pjesës së ngjyrosur me pjesën e pangjyrosur është $\frac{6}{12}$.

Kush mendoni se ka të drejtë? A mund të jetë ky raport $\frac{2}{4}$?



Fig. 7.8

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Barazimi i vërtetë i dy raporteve quhet **përpjesëtim (proporcion)**.

Kështu, barazimet $\frac{12}{8} = \frac{15}{10}$ dhe $\frac{3,6}{1,2} = \frac{6,3}{2,1}$ janë përpjesëtim. Kurse barazimi $\frac{2}{8} = \frac{3}{6}$ nuk është i vërtetë, pra nuk është përpjesëtim. Me ndihmën e shkronjave, përpjesëtimin e shkruajmë kështu: $a : b = c : d$ ose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Këtu dhe më tej do të supozojmë që të gjithë numrat janë të ndryshëm nga zero ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$).

Përpjesëtimi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lexohet kështu: “ a rri ndaj b , sikurse c rri ndaj d ” ose

“Raporti i a me b është sa raporti i c me d ”. Në përpjesëtimin $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

numrat a dhe d quhen **kufiza të jashtme**, kurse numrat b, c quhen **kufiza të brendshme**.

të brendshme
 $a : b = c : d$
 të jashtme

Fig. 7.9



Punë në grup

Tregoni kufizat e jashtme dhe kufizat e brendshme në përpjesëtimet:

– $\frac{21}{8}$ dhe $3,6 : 1,2 = 6,3 : 2,1$.

Në secilin përpjesëtim, gjeni prodhimin e kufizave të jashtme dhe prodhimin e kufizave të brendshme. Ç’vini re?



Mbani mend:

Prodhimi i kufizave të jashtme të përpjesëtimin është i barabartë me prodhimin e kufizave të brendshme të tij.

Kjo quhet **vetia themelore e përpjesëtimin**. Me anë të shkronjave, vetia themelore shprehet kështu: Nëse $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ është përpjesëtim, atëherë $a \cdot d = b \cdot c$.



Mbani mend:

Dy raporte të dhëna formojnë **përpjestim**, nëse prodhimi i dy kufizave të jashtme është i barabartë me prodhimin e dy kufizave të brendshme të tyre.

Nëse për raportet $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{c}{d}$ dihet që $a \cdot d = b \cdot c$, atëherë barazimi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ është përpjesëtim.



Punë në grup

Tregoni që barazimi $\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$ është përpjesëtim. Shqyrtoni barazimin $\frac{20}{5} = \frac{16}{4}$.

Si është marrë prej përpjesëtimit të parë? A është ky barazim përpjesëtim? Proveni të merrni përpjesëtime të tjera nga përpjesëtimi i dhënë.



Mbani mend:

Nëse në një përpjesëtim u ndërrojmë vendet e kufizave të brendshme, marrim përsëri një përpjesëtim. Nëse në një përpjesëtim u ndërrojmë vendet e kufizave të jashtme, marrim përsëri një përpjesëtim.

Me shkronja: nga përpjesëtimi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ rrjedhin përpjesëtimet: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ dhe $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Formoni përpjesëtime me numrat 1; 17; 3; 51.
- Duke përdorur vetinë themelore, tregoni nëse barazimet e mëposhtme janë përpjesëtime.

a) $5 : \frac{8}{3} = 3 : \frac{8}{5}$; b) $\frac{0,4}{0,1} = \frac{0,16}{0,4}$.

- Duke ndërruar vendet e kufizave, formoni tri përpjesëtime të reja nga përpjesëtimi i dhënë.

a) $5 : 15 = 4 : 12$; b) $\frac{12}{0,2} = \frac{30}{0,5}$.



- Një fotograf printon fotografi me këto përmasa: $6 \cdot 4$ cm; $7 \cdot 5$ cm; $10 \cdot 8$ cm; $12 \cdot 8$ cm. Një aparat fotografik digjital i bën fotografitë në raportin $3 : 2$. Në cilin format printohen fotografitë e këtij aparati fotografik?



USHTRIME

- Lexoni përpjesëtimin:

a) $3 : 7 = 6 : 14$; b) $\frac{1,2}{0,6} = \frac{1,8}{0,9}$.

- Kontrolloni nëse barazimi i dy raporteve është përpjesëtim:

a) $\frac{9}{2} : \frac{13}{4} = 36 : 26$; b) $\frac{18}{3} = \frac{30}{5}$; c) $\frac{15}{0,8} = \frac{2,7}{0,09}$.

- Duke përdorur barazimin e vërtetë $4 \cdot 9 = 0,2 \cdot 180$, formoni katër përpjesëtime të tjera.

- Nga numrat e dhënë formoni një përpjesëtim.

a) 10; 15; 24; 16; b) 2; 6; 18; 54.

- a) Formoni një përpjesëtim, tek i cili kufizat e jashtme janë 40 dhe 15.

b) Formoni dy përpjesëtime, ku secila nga kufizat e brendshme të jetë 18.

- A është e vërtetë fjalia: “Nëse në një përpjesëtim, kufizat e jashtme i vendosim në vend të të brendshmeve dhe të brendshmet i vendosim në vend të të jashtmeve, atëherë do të marrim përpjesëtim të ri”? Shpreheni këtë fjali me anë të shkronjave. Argumentoni.

7.5 Vetë të tjera të përpjesëtimeve

A Kërkoni dhe zbuloni

Jepet përpjesëtimi $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Si është formuar prej tij barazimi $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$?

Si janë formuar prej tij barazimet: $\frac{3+4}{3} = \frac{+}{+}$ dhe $\frac{4-3}{3} = \frac{8-6}{6}$?

A janë përpjesëtime barazimet e formuara?

Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Në përpjesëtimin $a : b = c : d$ apo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, kufizat a, b, c, d quhen përkatësisht kufiza e parë, e dytë, e tretë, e katërt. Kufiza a quhet paraardhëse e b ; kufiza c quhet paraardhëse e d . Kufiza b quhet pasardhëse e a ; kufiza d quhet pasardhëse e c .



Mbani mend:

Nëse në një përpjesëtim zëvendësojmë çdo raport me të anasjellin e vet, atëherë marrim përsëri përpjesëtim.

Nga përpjesëtimi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, rrjedh përpjesëtimi $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.



Mbani mend:

Në çdo përpjesëtim, raporti i shumës (apo ndryshimit) së dy kufizave të para me kufizën e dytë është i barabartë me raportin e shumës (apo ndryshimit) së dy kufizave të fundit me kufizën e katërt.

Pra, nga $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ rrjedh $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ dhe $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (kur $a > b$ dhe $c > d$).



Punë në grup

Shqyrtoni përpjesëtimin: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$. Si janë formuar barazimet:

$$\frac{4}{3} = \frac{4+8}{3+6}; \frac{4}{3} = \frac{-}{-}?$$

Tregoni që këto barazime janë përpjesëtime. Ç'përfundim nxirrni?



Mbani mend:

Në çdo përpjesëtim, shuma (ndryshimi) e kufizave paraardhëse rri ndaj shumës (ndryshimit) së kufizave pasardhëse sikurse çdo kufizë paraardhëse rri ndaj pasardhëses së saj.

Pra, nga $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ rrjedh $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ dhe $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$ (kur $a > c$ dhe $b > d$).

Përpjesëtimet $\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$; $\frac{a}{3} = \frac{3}{d}$ i kanë kufizat e brendshme të barabarta midis tyre. Në përpjesëtime të tilla, kufizat e brendshme quhen **të mesme përpjesëtimore (të përpjesshme)** të dy kufizave të tjera. Kështu, themi që 8 është i mesmi përpjesëtimor i 4 dhe 16; 3 është i mesmi përpjesëtimor i a dhe d .

**Mbani mend:**

Nëse x, y, z janë numra pozitivë, x quhet i mesmi përpjesëtimor i y, z nëse $\frac{y}{x} = \frac{z}{x}$ apo $x \cdot x = y \cdot z$.

Nëse kemi përpjesëtimin $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, atëherë x quhet i **katërti përpjesëtimor** i treshes së radhitur të numrave a, b, c .

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. a) A është përpjesëtim barazimi $\frac{4}{8} = \frac{7}{14}$?

b) Shkruani përpjesëtimet që krijohen prej tij, duke zbatuar vetitë që njihni.

2. A janë të vërteta fjalitë e mëposhtme:

a) Nëse $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atëherë $a \cdot b = c \cdot d$?

b) Nëse $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atëherë $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$?

c) Nëse $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atëherë $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$?

d) Nëse $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atëherë $\frac{a-b}{c} = \frac{c-d}{a}$?



3. Nëse gjatësia e rrugës midis dy qyteteve A dhe B është sa $\frac{2}{5}$ e gjatësisë së rrugës ndërmjet qytetit C dhe D, cili është raporti $\frac{CD}{AB}$, ku AB dhe CD janë largësitë ndërmjet qyteteve?

USHTRIME

1 a) A është përpjesëtim barazimi $35 : 21 = 10 : 6$?

b) Shkruani përpjesëtimet që krijohen prej tij, duke zbatuar vetitë që njihni.

2 Në përpjesëtimin e mëposhtëm ndërroni vendet e numrave, që përsëri të merret përpjesëtim.

a) $7 : 8 = 35 : 40$; b) $27 : 12 = 9 : 4$; c) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{5}{4} : \frac{15}{8}$.

3 Nga katër numrat e dhënë formoni sa më shumë përpjesëtime:

a) 9; 1; 9; 81; b) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}$; c) 36; 3; 18; 6.

4 Gjeni të katërtin përpjesëtimor të treshes së radhitur të numrave:

a) 5; 25; 10; b) 0,4; 1,6; 8.

5 Formoni dy përpjesëtime, në të cilat kufiza e brendshme të jetë 18.

6 Gjeni të mesmin përpjesëtimor të numrave:

a) 5 dhe 0,2; b) 2 dhe 50; c) $\frac{8}{3}$ dhe $\frac{3}{2}$.

7 Shkruani:

- a) dy përpjesëtime, ku kufiza e parë dhe e dytë të jenë 7 dhe 2;
- b) dy përpjesëtime, ku kufiza e tretë dhe e katërt të jenë 12 dhe 9;
- c) dy përpjesëtime, në të cilat kufizat paraardhëse të jenë 3 dhe 5;
- d) dy përpjesëtime, në të cilat kufizat e brendshme të jenë $\frac{2}{3}$ dhe $\frac{4}{5}$.

7.6 Gjetja e kufizës së panjohur në një përpjesëtim. Rregulla e treshit

A Kërkoni dhe zbuloni

Për të blerë dy buqeta me lule, Era shpenzoi 8,5 euro. Sa euro i duhen Erës për të blerë 4 buqeta me lule? Po tri buqeta?
Diskutoni.



B Vrojtoni dhe mësoni

Në një përpjesëtim mund të ndodhë që të njihen tri kufiza, kurse kufiza e katërt të jetë e panjohur. Ne mund ta gjejmë vlerën e kufizës së panjohur x , duke shkruar një ekuacion me ndryshore x , nëse përdorim vetinë themelore të përpjesëtimit.

Shembulli 1

Në përpjesëtimin $0,5 : x = 2 : 13$, gjeni vlerën e kufizës së panjohur x .

Zgjidhje

Duke përdorur vetinë themelore për përpjesëtimin $\frac{0,5}{x} = \frac{2}{13}$, marrim $x \cdot 2 = 0,5 \cdot 13$, d.m.th.

$x \cdot 2 = 6,5$. Duke pjesëtuar të dyja anët në këtë ekuacion me numrin $2 \neq 0$, gjejmë

$$x = \frac{6,5}{2}, \text{ d.m.th. } x = 3,25.$$

Shpesh, për të gjetur kufizën e panjohur në një përpjesëtim përdorim dhe rregullën e thjeshtë të treshit. Kështu në shembullin e rubrikës A, për të gjetur sa euro i duhen Erës për të blerë tri buqeta me lule shkruajmë:

2 buqeta kushtojnë 8,5 euro;

3 buqeta kushtojnë x euro;

Shkruajmë përpjesëtimin $\frac{2}{3} = \frac{8,5}{x}$; që nga $x = \frac{8,5 \cdot 3}{2} = 12,75$ euro.

Shembulli 2

Gjeni në përpjesëtimin $\frac{8,75}{\frac{15}{4}} = \frac{a}{0,75}$ kufizën e panjohur a .

Zgjidhje

Duke përdorur vetinë themelore, marrim barazimin $\frac{15}{4} \cdot a = 8,75 \cdot 0,75$. E zgjidhim këtë si ekuacion me ndryshore a . Fillimisht kthejmë $\frac{15}{4}$ në numër dhjetor. Kemi $\frac{15}{4} = 3,75$.

Pra $3,75 \cdot a = 8,75 \cdot 0,75$. Duke pjesëtuar të dyja anët me numrin $3,75 \neq 0$, marrim

$$a = \frac{8,75 \cdot 0,75}{3,75}. \text{ Thjeshtojmë dhe marrim } a = \frac{8,75}{5} \text{ d.m.th. } a = 1,75.$$

Shembulli 3

Gjeni të katërtin përpjesëtimor të treshes së radhitur të numrave 2, 8, 16.

Zgjidhje

Duke shënuar numrin e kërkuar me x , kemi: $2 : 8 = 16 : x$, d.m.th. $\frac{2}{8} = \frac{16}{x}$, prej ku, në bazë të vetisë themelore të përpjesëtimeve, kemi $2 \cdot x = 8 \cdot 16$, pra $2 \cdot x = 128$, prej ku $x = 64$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni të katërtin përpjesëtimor të numrave 3, 5, 15.
2. Gjeni të mesmin përpjesëtimor të numrave 3 dhe 12.
3. Zgjidhni ekuacionin për të gjetur kufizën e panjohur të përpjesëtimeve:
 a) $y : 51,6 = 11,2 : 34,4$; b) $\frac{67,8}{a} = \frac{7,62}{6,35}$.
4. Në një klasë me 33 nxënës, 13 janë djem. Edhe sa djem duhet të regjistrohen në të që raporti djem : vajza të jetë 3 : 4?

USHTRIME

- 1 Gjeni kufizën e panjohur në përpjesëtimet:
 a) $x : 13 = 6 : 3$; b) $32 : x = 8 : 3$; c) $54 : 21 = 45 : x$; d) $4 : 14 = x : 49$.
- 2 Gjeni kufizën e panjohur në përpjesëtimet:
 a) $\frac{61,5}{12,3} = \frac{30}{x}$; b) $\frac{x}{12,4} = \frac{8,4}{2,1}$; c) $\frac{35,7}{14,2} = \frac{x}{4}$.
- 3 Zgjidhni ekuacionin për të gjetur kufizën e panjohur të përpjesëtimeve:
 a) $\frac{12,3}{6} = \frac{7x}{4,2}$; b) $\frac{1}{2}x : 5 = 16 : 0,8$.
- 4 $\frac{5}{9}$ e një numri janë të barabarta me $\frac{3}{17}$ e këtij numri. Cili është ky numër?
- 5 Nga 225 kg mineral morën 34,2 kg bakër. Cila është përqindja e përmbajtjes së bakrit në mineral?
- 6 Nëse gjatësia e segmentit [AB] është sa $\frac{2}{5}$ e gjatësisë së segmentit [CD], sa është raporti i gjatësisë $\frac{CD}{AB}$?
- 7 Duke përdorur vetinë për shumën (ndryshimin) e kufizave, zgjidhni ekuacionet:
 a) $\frac{46-x}{x} = \frac{15}{8}$; b) $\frac{6+x}{x} = \frac{20}{15}$.
- 8 Cili numër i duhet shtuar numëruesit dhe emëruesit të thyesës $\frac{7}{27}$, për të marrë thyesën $\frac{3}{7}$?
- 9 Gjeni të mesmin përpjesëtimor të këtyre numrave:
 a) $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$; b) $\frac{x}{3} = \frac{27}{x}$.

7.7 Varësia në përpjesëtim të drejtë

A Kërkoni dhe zbuloni

Një punëtor fiton 80 euro për 5 ditë. Sa euro do të fitojë ai për 11 ditë?
Diskutoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

Në tabelën e mëposhtme është treguar lidhja midis gjatësisë së stofit dhe çmimit të tij.

Gjatësia e stofit (m)	1	2	3	4	...	x
Çmimi (euro)	20	40	60	80	...	y

Vihet re se raporti midis një vlere të madhësisë së dytë me vlerën përgjegjëse të madhësisë së parë është konstant (i njëjtë). $20 : 1 = 40 : 2 = 60 : 3 = 80 : 4 = \dots$

Gjithashtu, raporti midis dy vlerave të madhësisë së parë është i barabartë me raportin midis vlerave përgjegjëse të madhësisë së dytë. $1 : 3 = 20 : 60$; $3 : 4 = 60 : 80$; ...;

Një torno automatike prodhon për 2 orë 28 detale. Për një kohë dy herë më të gjatë (4 orë), ajo do të përgatisë dy herë më tepër detale, pra $28 \cdot 2 = 56$ detale. Për një kohë tri herë më të gjatë, ajo do të përgatitë tri herë më shumë detale etj. Sa herë më shumë kohë të punojë tornoja, aq herë më shumë detale do të përgatitë ajo.

Madhësi të tilla, si: koha e punës e tornos dhe sasia e detaleve përgatitur prej saj, i quajmë madhësi në **përpjesëtim të drejtë** (madhësi proporcionale).



Mbani mend:

Dy madhësi quhen në përpjesëtim të drejtë, nëse kur njëra prej tyre rritet (zvogëlohet) disa herë, edhe tjetra rritet (zvogëlohet) po aq herë.

Gjatësia e stofit të blerë dhe kostoja e tij janë madhësi në përpjesëtim të drejtë.

Le të kemi dy madhësi në përpjesëtim të drejtë. Le të jenë x_1, x_2 dy vlera të madhësisë së parë dhe y_1, y_2 dy vlerat përgjegjëse të madhësisë së dytë.

Atëherë kemi përpjesëtimet $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, që mund të shkruhet ndryshe $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.



Mbani mend:

Kur dy madhësi janë në përpjesëtim të drejtë, raportet e vlerave përgjegjëse të tyre janë të barabarta.

Gjatësia e një fëmije nuk është në përpjesëtim të drejtë me moshën e tij. Kur rritet mosha e fëmijës, rritet edhe gjatësia e tij, por kur mosha rritet dy herë, gjatësia nuk rritet dy herë.

Shembull

Për 3,2 kg mall u paguan 9,28 euro. Sa duhet paguar për 1,5 kg të këtij malli?

Zgjidhje

I shkruajmë shkurt të dhënat e problemës në një tabelë, duke shënuar me (euro) pagesën për 1,5 kg mall. Do të marrim këtë tabelë:

	Sasia e mallit	Pagesa
Blerja e parë	↓3,2 kg	↓9,28 euro
Blerja e dytë	1,5 kg	x euro

Sasia e mallit dhe pagesa për të janë madhësi në përpjesëtim të drejtë (pse?). Këtë fakt e kemi vënë në dukje me dy shigjeta, që kanë të njëjtin drejtim.

Shkruajmë përpjesëtimin $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, d.m.th. $\frac{3,2}{1,5} = \frac{9,28}{x}$. Nga vetia themelore e

përpjesëtimeve kemi: $3,2 \cdot x = 9,28 \cdot 1,5$, prej ku nxjerrim $x = \frac{9,28 \cdot 1,5}{3,2}$, d.m.th. duhen paguar $x = 4,35$ euro.

C Ushtroni duke zbatuar

- A është në përpjesëtim të drejtë rruga që bën një këmbësor, që lëviz në mënyrë të njëtrajtshme, me kohën e lëvizjes?
 - Jepni dy shembuj të tjerë madhësish në përpjesëtim të drejtë.
 - Jepni dy shembuj madhësish që nuk janë në përpjesëtim të drejtë.
- Një sferë çeliku me vëllim 6 cm^3 e ka masën 46,8 g. Cila do të jetë masa e një sfere (prej të njëjtit çelik) me vëllim $2,5 \text{ cm}^3$? Përdorni rregullën e thjeshtë të treshit.
-  Nga 21 kg fara luledielli u morën 5,1 kg vaj. Gjeni sa vaj do të merret nga 7 kg fara të tilla, duke përdorur rregullën e thjeshtë të treshit?

USHTRIME

- A është në përpjesëtim të drejtë varësia midis dy madhësive të mëposhtme?
 - Rrugës së përshkuar nga makina (me shpejtësi konstante) dhe kohës së lëvizjes.
 - Pagesës për një mall (me çmim të caktuar) dhe sasisë së tij.
 - Masës së një trau dhe vëllimit të tij.
 - Moshës së njeriut dhe numrit të këmbës së tij.
 - Brinjës së katrorit dhe perimetrit të tij.
 - Brinjës së katrorit dhe syprinës së tij.
- Nga blirët e mbjellë në qytet, u vu re që mbinë 95% e tyre. Sa blirë u mbollën, kur dihet që kanë mbirë 57?
- Në një mineral, për 7 pjesë hekur, janë 3 pjesë mbeturina. Sa tonë mbeturina ka në sasinë e mineralit nga e cila u morën 73,5 tonë hekur?
- Agimi lexoi për 4 ditë 68 faqe të një libri. Duke lexuar me të njëjtën shpejtësi, për sa ditë do ta mbarojë ai së lexuari librin me 170 faqe?
- Me 2,50 euro, Shpresa bleu 4 fletore dhe 2 lapsa. Sa euro i duhen asaj për të blerë 8 fletore dhe 4 lapsa?
- Një automobil bën 17 km me 1 litër benzinë. Sa km do të bëjë me 4,5 litra benzinë?



7.8 Paraqitja e objekteve me shkallë zvogëlimi apo zmadhimi

A Kërkoni dhe zbuloni

1. Në figurën 7.10 është paraqitur një pullë me shkallën 2 : 1 (kemi zmadhim). Sa është realisht diametri i pullës?
2. Merrni një hartë fizike të Kosovës. Lexoni shkallën e hartës. Si e kuptoni? Gjeni në të qytetin e Prishtinës dhe të Prizrenit. Matni me vizore distancën e tyre në hartë. Gjeni distancën e vërtetë midis dy qyteteve.

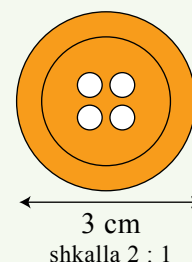


Fig. 7.10

B Vrojtoni dhe mësoni

Dini se pjesët e sipërfaqes së Tokës paraqiten në hartë në trajtë të zvogëluar, po kështu objekte të ndryshme në skica, fotografi. P.sh.: nëse segmentin prej 1 km e paraqesim në një hartë të lagjes me një segment me gjatësi 1 m, d.m.th. të zvogëluar 1000 herë, themi që kjo hartë ka shkallën 1 : 1000.



Mbani mend:

Raportin e gjatësisë së një segmenti në një hartë (apo skicë), me gjatësinë e segmentit përkatës në Tokë, e quajmë shkallë të hartës (skicës).

Në figurën 7.11 janë paraqitur disa objekte në shkallën 1 : 1. Kjo do të thotë që 1 cm në figurë i përgjigjet 1 cm në realitet. Ne mund të lexojmë menjëherë përmasat e këtyre objekteve.

Në figurën 7.12 është paraqitur me shkallën 1 : 10 trekëndëshi kënddrejtë ABC.

Në figurë gjatësia e katetit [AC] është 1 cm, prandaj gjatësia e vërtetë e katetit është 10 cm.

Për të bërë paraqitjen grafike me shkallë zvogëlimi (apo zmadhimi) të një objekti si edhe për të gjetur përmasat e vërteta të tij, kur njihen përmasat e kësaj paraqitjeje grafike, mund të përdoren përpjesëtimet.

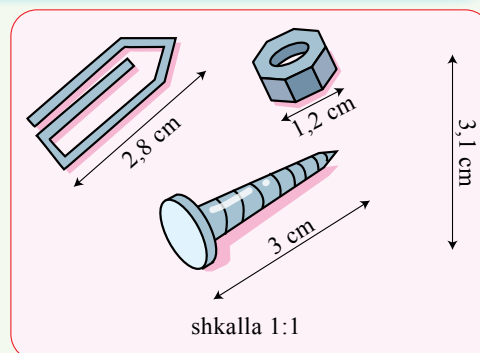


Fig. 7.11

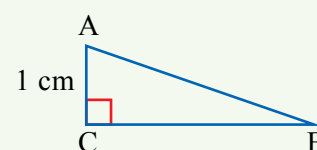


Fig. 7.12

Shembulli 1

Largesa midis dy fshatrave në hartën me shkallë 1 : 25 000 është 6,5 cm. Sa është largesa e vërtetë midis tyre?

Zgjidhje

E shënojmë largesën (në Tokë) midis fshatrave me x (cm). Kemi $\frac{6,5}{x} = \frac{1}{25\,000}$

(sepse raporti midis gjatësisë së segmentit në hartë me gjatësinë e tij në Tokë na jep shkallën e hartës). Prej këtui kemi $6,5 \cdot 25\,000 = x$, d.m.th. $x = 162\,500 \text{ cm} = 1\,625 \text{ m}$.

Shembulli 2

Largesa midis dy qyteteve është 120 km. Sa do të jetë largesa përkatëse në hartën me shkallë 1:1 000 000?

Zgjidhje

E shënojmë largesën e kërkuar në hartë me x (km). Kemi $\frac{x}{120} = \frac{1}{1\,000\,000}$ (pse?).

Prej këtui nxjerrim $x = \frac{120}{1\,000\,000} \text{ km} = \frac{120 \cdot 1000}{1\,000\,000} \text{ m} = \frac{120 \cdot 1000 \cdot 100}{1\,000\,000} \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

Ja disa shkallë zvogëlimi që përdoren shpesh.

Shkalla	Përdorimi
1 : 10 deri 1 : 25	Dizajnim mobiliesh
1 : 50 deri 1 : 200	Paraqitje godinash
1 : 500 deri 1 : 2000	Planimetri parcelash
1 : 5000 deri 1 : 25 000	Harta topografike
1 : 100 000 deri 1 : 200 000	Harta automobilistike (rrugore)
1 : 1 000 000 deri 1 : 5 000 000	Harta gjeografike

C Ushtroni duke zbatuar

- Matni në hartën e Kosovës largesën e vendbanimit tuaj nga një qendër urbane e rëndësishme (p.sh. Prishtina, Gjakova, Prizreni etj.) dhe gjeni pastaj largesën e vërtetë.
- Nëse duam që dhomën me përmasa 4 m me 5 m ta paraqesim me përmasa 4 cm me 5 cm, çfarë shkalle duhet të ketë skica?
- Matni gjatësinë dhe gjerësinë e dhomës suaj. Vizatoni në letër planin e kësaj dhome me shkallën 1 : 100.

**USHTRIME**

- Në një skicë, gjatësia e kopshtit është 3,5 cm. Sa është shkalla e skicës, nëse kopshti është në të vërtetë 14 m i gjatë.
- Largësia midis dy qyteteve është 42 km. Sa do të jetë largesa midis pikave që i paraqesin ato në hartën me shkallë 1 : 500 000?
- Hekurudha midis dy qyteteve në një shtet është 650 km e gjatë. Paraqitni me segment këtë largesë, duke përdorur shkallën 1 : 10 000 000.
- Një segmenti prej 7,2 cm (në hartë) i përgjigjet një segment në tokë me gjatësi 144 km. Sa është largesa e vërtetë midis qyteteve, nëse largesa në hartë midis tyre është 6,3 cm?
- Gjatësia e një detali në skicën me shkallë 1 : 5 është 7,2 cm. Sa do të jetë gjatësia e këtij detali në një skicë tjetër me shkallë: a) 1 : 3; b) 2 : 1?
- Në figurën 7.13 është paraqitur plani i një shtëpie me kopsht, në shkallën 1 : 2500. Duke matur përmasat e skicës:
 - Gjeni përmasat dhe syprinën e shtëpisë bashkë me kopshtin.
 - Gjeni syprinën e shtëpisë pa kopshtin.

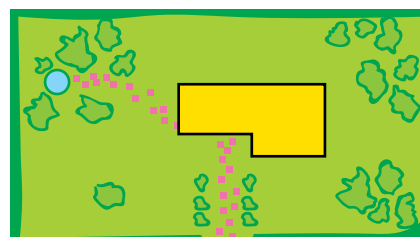


Fig. 7.13

7.9 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

<i>Tashmë kemi mësuar</i>	<i>Provoni të zgjidhni</i>
Kuptimin e raportit dhe përdorimin e tij.	1. Cila është forma më e thjeshtuar e raportit $100 : 30$? 2. Vizatoni tre drejtkëndësha të ndryshëm me raporte të përmasave gjatësi : gjerësi $= 3 : 2$. 3. Dy radhitës ndanë midis tyre një dorëshkrim 120 faqesh në raportin $3 : 5$. Nga sa faqe shtypën secili? 4. Kemi 110 lapsa trengjyrësh. Raporti i lapsave të zinj ndaj atyre të kaltër është $5 : 4$, kurse raporti i lapsave të kaltër ndaj atyre të kuq është $2 : 1$. Nga sa lapsa të secilës ngjyrë kemi?
Shprehjen e raportit në përqindje.	5. Shprehni si numër dhjetor dhe si thyesë: a) 21%; b) 56%; c) 78%. 6. Shprehni si numër dhjetor dhe si përqindje: a) $\frac{6}{8}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{5}$. 7. Gjatë pastrimit të grurit, prej 1750 kg grurë veçuan 105 kg papastërti. Ç'përqindje grurit të pastër mbeti?
Dallimin e numërorëve që formojnë përpjesëtim.	8. Nga numrat e dhënë, zgjidhni katër numra me të cilët mund të formoni përpjesëtim: a) 7; 9; 15; 21; 25; 35; 42; 49? b) 5; 10; 15; 24; 30; 40; 50; 64? 9. A janë përpjesëtime barazimet? a) $2,04 : 0,6 = 2,72 : 0,8$; b) $0,012 : 0,28 = 0,204 : 0,51$.
Përdorimin e vetive të përpjesëtimit.	10. Jepet treshja e numrave: 5, 25, 10. a) Gjeni një numër të katërt, që të formohet një përpjesëtim. b) Sa numra të tillë mund të gjenden? 11. Nga katër numrat e dhënë formoni sa më shumë përpjesëtime, duke përdorur vetitë e përpjesëtimit. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

Dallimin e madhësive të drejta përpjesëtimore.	12. Për dy fletore, Arbri pagoi 2 euro. Sa euro kushtojnë 5 fletore? Po 11 fletore? 13. Një njeri përshkon 3 km duke ecur për 40 minuta. Sa km do të përshkojë për 60 minuta, nëse ecën me të njëjtën shpejtësi?
Caktimin e së katërtës përpjesëtimore në përpjesëtimet e dhëna.	14. Gjeni vlerën e x, duke përdorur vetitë e njohura, në përpjesëtimet e dhëna: a) $\frac{6}{x} = \frac{20}{15}$. b) $(22 - x) : x = 6 : 5$.
Zbatimin e rregullës së thjeshtë të treshit për të caktuar vlerën e të panjohurës te përpjesëtimet.	15. Një punëtor për 3 ditë ka shtruar pllaka në një sipërfaqe 28 m^2. Për sa ditë do të mbulojë me pllaka një sipërfaqe prej 168 m^2? 16. Tre autobusë transportojnë 156 pasagjerë. Sa autobusë duhen për të transportuar 364 pasagjerë?
Zgjidhjen e problemave nga jeta e përditshme, duke përdorur numra përpjesëtimorë dhe përqindjet.	17. Në një qendër votimi janë regjistruar 638 zgjedhës (305 burra dhe 333 gra). Kanë votuar 517 persona, prej të cilëve 260 burra. a) Sa për qind e zgjedhësve ka votuar? b) Është më e madhe përqindja e votuesve për burrat apo për gratë? 18. Në skicën me shkallë $1 : 150$, një objekt paraqitet me përmasa 3 cm me 4 cm. Sa janë përmasat e vërteta të objektit? 19. Në një skicë, një segment me gjatësi $AB = 6 \text{ m}$ është paraqitur nga një segment me gjatësi 9 cm. Me sa cm do të paraqitet në skicë segmenti me gjatësi $CD = 10 \text{ m}$?

7.10 Vlerësim

Koha: 45 minuta

- 1** Segmenti $[AB]$ është ndarë nga pika C në dy pjesë, në mënyrë që $AC = 12$ cm; $BC = 6$ cm. Gjeni raportet e gjatësisë: a) $\frac{BC}{AB}$; b) $\frac{AB}{AC}$. (2 pikë)
- 2** Gjeni raportin:
a) 24 cm me 4 cm; b) 1,2 kg me 300 g; c) 20 min me 2 orë. (3 pikë)
- 3** Mësimet në shkollë zgjasin 5 orë. Raporti midis orëve mësimore dhe pushimeve është $9 : 1$. Sa kohë zgjasin pushimet? (3 pikë)
- 4** Gjeni:
a) 16% e 200 eurove; b) 125% e 300 eurove. (2 pikë)
- 5** Në fillim të vitit shkollor ishin 550 nxënës. Gjatë vitit, numri i nxënësve të shkollës u rrit me 8%. Sa nxënës ishin në fund të vitit? (3 pikë)
- 6** Zbatoni vetinë e vargut të raporteve të barabarta. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \dots$ (1 pikë)
- 7** Shkalla e një ndërtese të vizatuar në planimetri është $1 : 2500$.
a) Sa është gjatësia e murit, në qoftë se në planimetri ai paraqitet me një segment 3 cm të gjatë?
b) Me çfarë gjatësie paraqitet në planimetri një dritare që është 2 m e gjatë? (2 pikë)
- 8** Në hartë, largesa prej 120 km është paraqitur me segment me gjatësi 30 cm. Me cilin segment do të paraqitet largesa prej 150 km? 1 (2 pikë)
- 9** Formoni një përpjesëtim me numrat 3, 12, 8, 2. (2 pikë)
- 10** Gjeni kufizën e panjohur:
a) $\frac{3}{18} = \frac{x}{72}$; b) $3,5 : x = 1 : 0,2$; c) $\frac{5+x}{x} = \frac{3}{4}$. (6 pikë)
- 11** Pasi u rrit paga me 30%, një punëtor merr 13 euro në ditë. Sa euro ka qenë paga e tij më parë? (3 pikë)
- 12** Pesë pako përmbajnë 70 ëmbëlsira.
a) Sa ëmbëlsira do të ketë në 7 pako?
b) Sa pako duhen për të paketuar 154 ëmbëlsira? (2 pikë)

8

Matja e madhësive gjeometrike

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- zgjedh njësitë standarde për matjen e gjatësisë, sipërfaqes, si dhe shpjegon marrëdhëniet ndërmjet njësive të ndryshme të matjeve gjatë zgjidhjes së problemave;
- cakton perimetrin e figurave dydimensionale me anë të formulave dhe me matje;
- “vërteton” Teoremën e Pitagorës në trekëndëshin kënddrejtë (duke ndërtuar katrorë mbi brinjët e tij) dhe e zbaton atë për njehsimin e gjatësisë së hipotenuzës apo katetit të trekëndëshit kënddrejtë;
- zbaton Teoremën e anasjellë të Pitagorës për të përcaktuar nëse një trekëndësh është kënddrejtë ose jo;
- zbaton Teoremën e Pitagorës për njehsimin e lartësisë të trekëndëshi barakrahës (dybrinjënjëshëm) dhe barabrinjës, si dhe për njehsimin e diagonales të drejtkëndëshi dhe të katrori;
- njehson perimetrin dhe syprinën e sipërfaqes shumëkëndëshe (paralelogrami, trekëndëshi, trapezi, deltoidi) me anë të formulave;
- njehson perimetrin dhe syprinën e sipërfaqeve shumëkëndëshe të rregullta, kur dihet brinja dhe rrezja e rrethit të brendashkruar;
- njehson perimetrin dhe syprinën e sipërfaqes rrethore;
- zbërthen figurat jo të rregullta në figura të thjeshta dydimensionale, për të gjetur perimetrin dhe syprinën e tyre;
- përdor formulat për njehsimin e perimetrit dhe syprinës së sipërfaqeve shumëkëndëshe dhe rrethore në detyra nga jeta e përditshme.



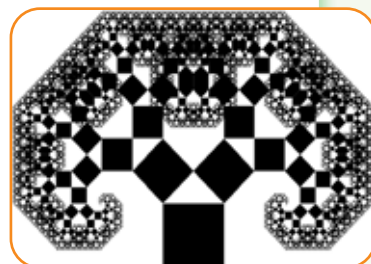
Fjalë kyçe:

matje, njësi të matjes, perimetër, syprinë, Teorema e Pitagorës, trekëndësh kënddrejtë, sipërfaqe shumëkëndëshe, sipërfaqe rrethore, figura të përbëra.

A E DINI SE...?



Pema ose druri i Pitagorës është një figurë që përbëhet prej katrorësh të tillë që çdo tre katrorë fqinjë formojnë me brinjët e tyre një trekëndësh kënddrejtë, në formë të atillë që vërteton Teoremën e Pitagorës. Konstruksioni fillon nga një katror me brinjë një njësi mbi të cilin konstruktojmë dy katrorë të vegjël me brinjë $\frac{1}{2} \sqrt{2}$, të tillë që secili katror ka nga një kulm të përbashkët me dy tjerët. Në hapin e dytë, procesi vazhdohet në dy katrorët e tjerë e kështu me radhë.



8.1 Përsëritje mbi njësité e matjes së gjatësisë e të syprinës

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Kujtoni njësité e gjatësisë dhe të syprinës: njësinë themelore, shumëfishat dhe nënfishat.

Në vend të pikave vendosni numrin e duhur:

- a) $12 \text{ m} = \dots \text{ cm}$; b) $17 \text{ cm} = \dots \text{ mm}$; c) $4 \text{ km} = \dots \text{ m} = \dots \text{ cm}$;
d) $7 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$; e) $15 \text{ cm}^2 = \dots \text{ mm}^2$; f) $3 \text{ km}^2 = \dots \text{ m}^2$.

B Vrojtoni dhe mësoni

Njësia bazë për matjen e gjatësive është metri (shënohet m).

Metri ka shumëfishat dhe nënfishat e tij, që janë paraqitur në tabelën e mëposhtme:

	Njësia	Shkurtimi	Raporti me metrin
Shumëfishat	Dekametri	dam	$1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$
	Hektometri	hm	$1 \text{ hm} = 100 \text{ m}$
	Kilometri	km	$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$
Nënfishat	Decimetri	dm	$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$
	Centimetri	cm	$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$
	Milimetri	mm	$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$

Në figurën 8.1 jepet tabela e shndërrimeve të njësive të gjatësisë.

Një shumëfish tjetër i metrit është milja: $1 \text{ milje} = 1609 \text{ metra} \approx 1,6 \text{ km}$. Ajo përdoret kryesisht në lundrimet detare ose në fluturimet ajrore.

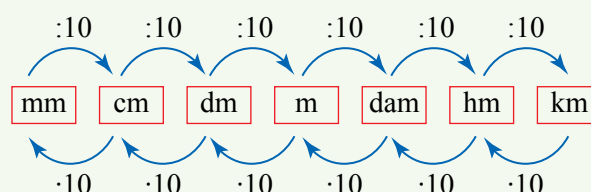


Fig. 8.1

Njësia bazë për matjen e syprinave është metri katror (shënohet m^2).

Metri katror ka shumëfishat dhe nënfishat e tij, të cilët paraqiten në tabelën e mëposhtme.

	Njësia	Shkurtimi	Raporti me metrin katror
Shumëfishat	Dekametri katror	dam^2	$1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$
	Hektometri katror	hm^2	$1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$
	Kilometri katror	km^2	$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$
Nënfishat	Decimetri katror	dm^2	$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$
	Centimetri katror	cm^2	$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$
	Milimetri katror	mm^2	$1 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$

Në figurën 8.2 jepet tabela e shndërrimeve të njësive të syprinës.

Në bujqësi, për matje syprinash, përdoren **ari** (ar), **dynymi** (dn) dhe **hektari** (ha).

$1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2$; $1 \text{ dynym} = 1000 \text{ m}^2$;

$1 \text{ hektar} = 10\,000 \text{ m}^2$; $1 \text{ hektar} = 100 \text{ ar}$.

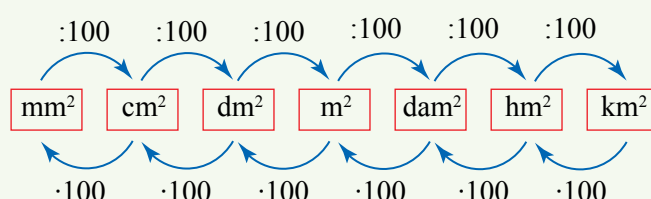


Fig. 8.2

Shembulli 1

$325 \text{ cm} = 3,25 \text{ m} = 32,5 \text{ dm}$; $2857 \text{ m} = 2,857 \text{ km}$; $3\,521 \text{ mm} = 3,521 \text{ m} = 352,1 \text{ cm}$.

Shembulli 2

a) $5,2 \text{ m}^2 = 5,2 \cdot 100 \text{ dm}^2 = 520 \text{ dm}^2$; b) $17,3 \text{ cm}^2 = 17,3 \cdot 100 \text{ mm}^2 = 1\,730 \text{ mm}^2$.

Shembulli 3

Një fermer ka një sipërfaqe toke me syprinë $3,5 \text{ dn}$. Prej tyre, 2 dn i ka mbjellë me vreshta. Pjesën tjetër do ta mbjellë me perime. 70% të saj do ta mbjellë me domate.

a) Sa m^2 do të mbjellë me domate?

b) Sa m^2 do të mbjellë me perime të tjera?

*Zgjidhje*

Gjejmë së pari sa dynym do të mbjellë me perime: $3,5 \text{ dn} - 2 \text{ dn} = 1,5 \text{ dn}$ do të mbjellë me perime.

Gjejmë tani sa m^2 do të mbjellë me domate.

$1,5 \text{ dn} = 1500 \text{ m}^2$; $1500 \cdot \frac{70}{100} = 1050 \text{ m}^2$ do të mbjellë me domate. Gjejmë së fundi sa m^2 do të mbjellë me perime të tjera. $1500 \text{ m}^2 - 1050 \text{ m}^2 = 450 \text{ m}^2$ do të mbjellë me perime të tjera.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Ktheni në njësinë e kërkuar.

a) $7,02 \text{ m} = \dots\dots\dots \text{ cm} = \dots\dots\dots \text{ mm}$;

b) $1,13 \text{ km} = \dots\dots\dots \text{ m}$;

c) $13,24 \text{ dm} = \dots\dots\dots \text{ cm} = \dots\dots\dots \text{ mm}$;

d) $23,84 \text{ m} = \dots\dots\dots \text{ cm}$.

2. Brinjët e një trekëndëshi kanë gjatësitë $a = 17,9 \text{ cm}$; $b = 134 \text{ mm}$ dhe $c = 25,3 \text{ cm}$. Gjeni perimetrin e trekëndëshit.

 3. Fusha me syprinë $17,4 \text{ ha}$ do të ndahet në 60 parcela me syprina të barabarta. Sa ar është secila parcelë?

USHTRIME

1 Kryeni veprimet:

a) $5 \text{ m } 13 \text{ cm} + 2 \text{ m } 4 \text{ cm } 6 \text{ mm}$;

b) $2 \text{ km } 75 \text{ m} - 1832 \text{ m}$;

c) $5 \text{ m} - 283 \text{ cm } 9 \text{ mm}$;

d) $3 \text{ m } 7 \text{ cm} \cdot 4$;

e) $5 \text{ cm } 8 \text{ mm} \cdot 5$;

f) $4,98 \text{ m} : 10$.

2 Njëra nga brinjët e paralelogramit është $8,7 \text{ cm}$, ndërsa brinja tjetër është 2 herë më e madhe. Gjeni perimetrin e paralelogramit.

3 Gjatësia e Benit është $1,58 \text{ m}$, ndërsa e motrës së tij është $1,1 \text{ dm}$ më pak. Sa është gjatësia e motrës së tij?

4 Dy segmente, nga të cilat njëra është sa dyfishi i tjetrës, e kanë shumën e gjatësive $18,6 \text{ cm}$. Një segment i tretë e ka gjatësinë $1,8 \text{ cm}$ më të madhe se segmenti më i vogël. Sa është shuma e gjatësive të tri segmenteve?

5 Nga 1 ha tokë bujqësore merren $60,5 \text{ kv}$ misër. Sa kv misër merren nga një parcelë me syprinë $7,2 \text{ ha}$?

8.2 Perimetri i shumëkëndëshit

A Kërkoni dhe zbuloni

Një fermer ka një fushë. Ai dëshiron të vendosë një gardh rreth e përqark kufijve të fushës. Fusha është në formën e një drejtkëndëshi me përmasa 520 m dhe 400 m.

Sa m tel i duhet fermerit për të përgatitur gardhin?

Diskutoni.

B Vrojtuni dhe mësoni

Për të ditur se sa metra tel duhet të blejë, fermeri duhet të dijë **perimetrin** e fushës së tij.



Mbani mend:

Perimetri është shuma e gjatësive të brinjëve të figurës.

Dini se:

- Perimetri i drejtkëndëshit = (gjatësi + gjerësi) · 2
- Perimetri i katrorit = gjatësi e brinjës · 4

Në figurën 8.3 janë paraqitur disa shumëkëndësha të rregullt.

Në qoftë se shënojmë me n numrin e brinjëve të një shumëkëndëshi të rregullt dhe me a gjatësinë e brinjës, atëherë perimetri i tij jepet me formulën:

$$P = n \cdot a.$$



Fig. 8.3

Shembull

Gjeni perimetrin e gjashtëkëndëshit të rregullt me brinjë 5 cm.

Zgjidhje

Secila brinjë e gjashtëkëndëshit është 5 cm. Atëherë perimetri i tij është sa gjashtëfishi i brinjës. Kemi $P = 6 \cdot 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.

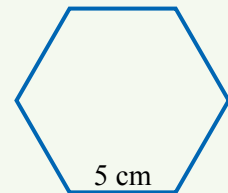


Fig. 8.4

C Ushtroni duke zbatuar

1. Dona po njehsonte perimetrin e një drejtkëndëshi me përmasa 4 m me 20 cm. Më poshtë, paraqitet puna e saj:

$$\text{Perimetri i drejtkëndëshit} = (\text{gjatësi} + \text{gjerësi}) \cdot 2;$$

$$\text{Perimetri} = (4 + 20) \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48.$$

Ç'gabim ka bërë Dona? Shkruani zgjidhjen e saktë.

2. Gjeni perimetrin e drejtkëndëshit me gjatësi 4,5 m dhe gjerësi 2,8 dm.
3. Gjeni perimetrin e shumëkëndëshit në figurën 8.5. (Përmasat janë dhënë në cm.)
4. Një fermer e ndau parcelën drejtkëndore në dy pjesë të barabarta midis fëmijëve të tij. A shtohen shpenzimet për gardhet rrethuese me këtë ndarje?

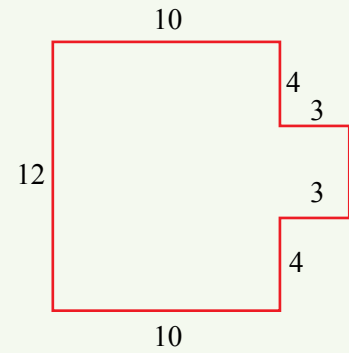


Fig. 8.5

USHTRIME

1. Gjeni perimetrin e shumëkëndëshit të rregullt, kur jepet numri i brinjëve n dhe gjatësia e brinjës:
- $n = 4$; $a = 2,5$ cm.
 - $n = 6$; $a = 6$ cm.
 - $n = 12$; $a = 4,5$ cm.
2. Gjeni gjatësinë e brinjëve të shumëkëndëshit të rregullt, kur jepet numri i brinjëve n dhe perimetri i tij P .
- $n = 3$; $P = 21,6$ cm.
 - $n = 8$; $P = 68$ cm.
 - $n = 12$; $P = 144$ cm.
3. Perimetri i tetëkëndëshit të rregullt është 76 cm. Gjeni gjatësinë e brinjës së tij.
4. Katrori dhe trekëndëshi barabrinjës kanë perimetra të barabartë. Gjeni:
- brinjën e katrorit, në qoftë se brinja e trekëndëshit është 8 cm;
 - brinjën e trekëndëshit, në qoftë se brinja e katrorit është 12 cm.
5. Gjeni perimetrin e deltoidit me brinjë me gjatësi 14 cm dhe 6 cm.
6. Në një trekëndësh barakrahës baza është 5 cm, ndërsa brinja anësore është 0,7 cm më pak se dyfishi i bazës. Gjeni perimetrin e trekëndëshit.
7. Gjeni elementet e panjohura në figurën 8.6.

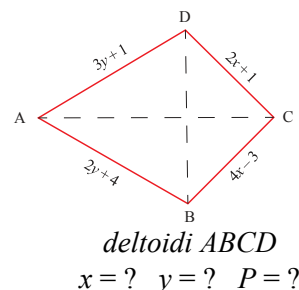
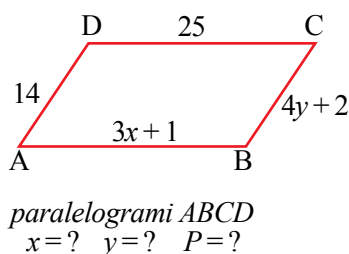


Fig. 8.6

8. Bazat e një trapezi janë 12 cm dhe 8 cm. Njëra nga brinjët anësore është sa 60 % e bazës së madhe, ndërsa brinja tjetër anësore është sa $\frac{3}{4}$ e bazës së vogël. Gjeni perimetrin e trapezit.

8.3 Perimetri i rrethit

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Vizatoni një rreth me rreze 4 cm në një letër me ngjyrë. Priteni rrethin. Merrni një fije peri dhe rrethoni rrethin tuaj. Më pas matni gjatësinë e fijes për të gjetur gjatësinë e rrethit. Gjeni herësin e gjatësisë së rrethit me diametrin e tij.

Përsëritni veprimet duke prerë rrathë me rreze të ndryshme.

Çfarë vini re?

Diskutoni me shokun/shoqen.

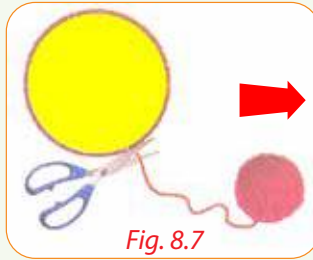


Fig. 8.7

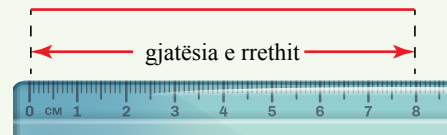


Fig. 8.8

B Vrojtoni dhe mësoni

Gjetja e perimetrit të rrethit nuk mund të realizohet drejtpërdrejt, sepse është e pamundur që vizorja të mbështetet në rreth. Për këtë arsye duhen gjetur mundësi të tjera, si ato që përmendëm më lart. Një tjetër mënyrë për të gjetur gjatësinë e një rrethi prej teli është kjo: e presim telin në një pikë dhe më pas e shtrijmë atë sipas një drejtëze.



Punë në grup

Disa matje më të sakta të gjatësive të tre rrathëve janë paraqitur në tabelën e mëposhtme.

Rrethi	Diametri (cm)	Gjatësia e rrethit (afërsisht) (cm)	Herësi gjatësi/diametër
I	7	22	
II	10	31,4	
III	14	44	

Plotësoni tabelën për vlerat e herësit.

Vini re se herësi $\frac{\text{perimetër}}{\text{diametër}}$ është i njëjtë për të tre rrathët.

2000 vjet më parë është zbuluar që për çdo rreth, raporti i perimetrit me diametrin e tij është një numër i caktuar. Ky numër shënohet me shkronjën e alfabetit grek π (lexohet pi), dhe është afërsisht i barabartë me $\frac{22}{7}$ ose 3,14 ($\pi \approx 3,14$). Duke shënuar me P perimetrin e rrethit dhe me d diametrin e tij, kemi: $\frac{P}{d} = \pi$.



Kujdes!

Numri pi nuk është numër racional, por ne e përafrojmë atë me një numër racional. Në vazhdim, në vend të numrit pi do të shënojmë numrin racional 3,14.



Mbani mend:

Perimetri i rrethit me diametër d njësohet me formulën: $P = \pi \cdot d$.

Meqë $d = 2R$, ku R është rrezja e rrethit, perimetri i rrethit jepet me formulën $P = 2\pi R$.

Shembulli 1

Gjeni perimetri i rrethit me rreze $R = 4$ cm.

Zgjidhje

Në formulën e perimetrit zëvendësojmë $R = 4$ cm dhe $\pi = 3,14$.

Kemi: $P = 2 \cdot 3,14 \cdot 4$ cm = 25,12 cm.

Shembulli 2

Perimetri i rrethit është 37,68 cm. Gjeni rrezen e tij.

Zgjidhje

Nga formula $P = 2\pi R$, kemi $R = \frac{P}{2\pi}$. Zëvendësojmë e kemi: $\frac{37,68 \text{ cm}}{2 \cdot 3,14} = 6$ cm.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Rrezja e një pjate rrethore është 11 cm. Gjeni perimetrin e pjatës.
2. Në figurën 8.10 është paraqitur një gjysmëqark. Gjeni, me saktësi deri në të dhjetat e cm, perimetrin e gjysmëqarkut.

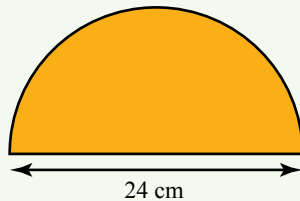


Fig. 8.10

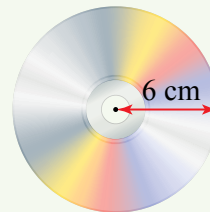


Fig. 8.11



3. Rrezja e një CD është 6 cm (fig.8.11). Gjeni diametrin dhe perimetrin.

USHTRIME

- 1 Gjeni distancën që përshkon një rrotë me diametër 80 cm, kur bën 2 rrotullime.
- 2 Një fije teli përbëhet nga dy gjysmërrathë (fig. 8.12). Gjeni gjatësinë e saj.

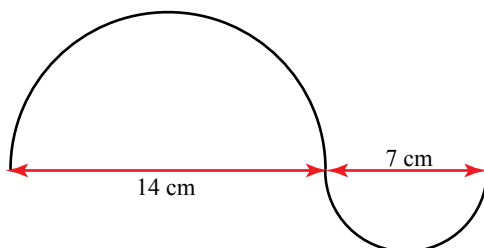


Fig. 8.12

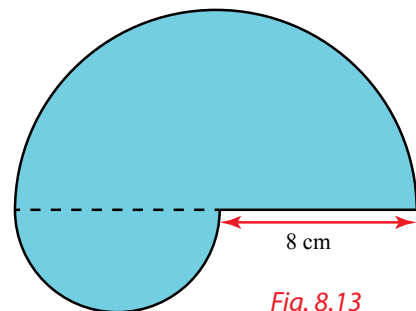


Fig. 8.13

- 3 Gjeni perimetrin e figurës së ngjyrosur (fig.8.13).
- 4 Gjeni perimetrin e figurës së ngjyrosur (fig.8.14).

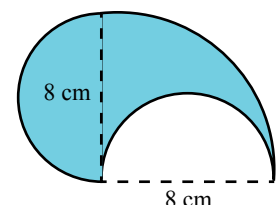


Fig. 8.14

- 5 Rrota e një karroce e ka rrezen 30 cm.
 - a) Çfarë rruge bën karroca, në qoftë se rrota e saj bën 200 rrotullime të plota?
 - b) Sa rrotullime ka bërë rrota e karrocës gjatë një rruge prej 1 695,6 m?



- 6 Perimetri i ekuatorit është 40 000 km. Gjeni rrezen e tokës në ekuator.

8.4 Teorema e Pitagorës

A Kërkoni dhe zbuloni

Në fletë me katrorë ndërtoni një trekëndësh kënddrejtë me katete 6 njësi dhe 8 njësi.

a) Matni gjatësinë e hipotenuzës.

b) Ndërtoni 3 katrorë që kanë përkatësisht si brinjë, katetet dhe hipotenuzën.

c) Njehsoni syprinat e tre katrorëve.

d) Krahasoni shumën e syprinave të katrorëve të ndërtuar mbi katete me syprinën e katrorit të ndërtuar mbi hipotenuzë.

Përsëritni veprimet mbi një trekëndësh tjetër kënddrejtë.

Çfarë vini re?

Diskutoni.

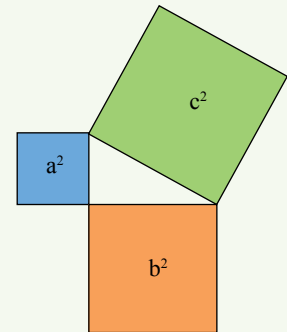


Fig. 8.15

B Vrojtoni dhe mësoni

Në matematikë, disa pohime pranohen si të vërteta pa pasur nevojë për vërtetim.

Fjali të tilla quhen **aksioma**. E tillë është, për shembull, aksioma:

“Nëpër dy pika të ndryshme kalon një dhe vetëm një drejtëz.”

Ka fjali të tjera matematike që vërtetohen, pra, tregohet vërtetësia e tyre me arsyetim, duke u bazuar në fjali të vërteta, të njohura që më parë.

Të tilla fjali matematike quhen **teorema**. E tillë është dhe Teorema e Pitagorës.



Mbani mend:

Teorema e Pitagorës

Në trekëndëshin kënddrejtë, katrori i hipotenuzës është i barabartë me shumën e katrorëve të kateteve.

Vërtetim

Le të kemi trekëndëshin kënddrejtë ABC me katete me gjatësi $BC = a$, $AC = b$ dhe hipotenuzë me gjatësi $AB = c$.

Marrim në shqyrtim katrorin CKLM me brinjë $(a + b)$, në brinjët e të cilit janë vendosur pikat A, B, Q, P të tilla që: $AC = BM = QL = PK = b$.

Është e qartë që $BC = MQ = LP = KA = a$.

Secili nga trekëndëshat kënddrejtë ABC, BMQ, PLQ, KPA i kanë katetet përkatësisht a dhe b . Nga kjo rrjedh që syprina e secilit prej tyre është $\frac{a \cdot b}{2}$.

Në klasa më të larta, ju do të vërtetoni që katërkëndëshi ABQP është katror; brinja e tij është sa hipotenuza e trekëndëshit kënddrejtë të dhënë ABC, pra është c .

Syprina e katrorit CKLM, që e ka brinjën $(a + b)$ është $S = (a + b)^2$

Ky katror përbëhet nga katër trekëndësha kënddrejtë kongruentë (syprina e secilit nga ata është $\frac{1}{2}ab$) dhe nga katrori ABQP, me brinjë c , syprina e të cilit është c^2 .

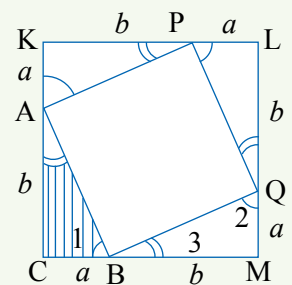


Fig. 8.16

Pra $S = 4(\frac{1}{2}ab) + c^2$, d.m.th. $(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$, që nga $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

D.m.th. $a^2 + b^2 = c^2$.

Teorema u vërtetua.

Shembulli 1

Në trekëndëshin kënddrejtë, hipotenuza është 13 cm dhe njëri katet është 12 cm. Gjeni katetin tjetër.

Zgjidhje

Duke shënuar me x katetin e kërkuar, sipas Teoremës së Pitagorës kemi:

$12^2 + x^2 = 13^2$, që nga $x^2 = 13^2 - 12^2$, pra $x^2 = 25$. Pra, $x = +\sqrt{25} = 5$ cm.

Shembulli 2

Në trekëndëshin barakrahës, brinja anësore është 10 cm, kurse baza 12 cm. Gjeni lartësinë mbi bazë dhe syprinën e trekëndëshit.

Zgjidhje

Le të jetë ABC trekëndëshi i dhënë, me gjatësi të brinjëve $AB = AC = 10$ cm dhe $BC = 12$ cm.

Lartësia [AH] është mesore e bazës, prandaj $HC = \frac{1}{2}BC = 6$ cm.

Zbatojmë Teoremën e Pitagorës në trekëndëshin kënddrejtë AHC.

Kemi:

$AC^2 = AH^2 + HC^2$ d.m.th. $10^2 = AH^2 + 6^2$, që nga $AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$.

Pra, $AH = \sqrt{64} = 8$ cm.

Syprina e trekëndëshit është: $S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$.

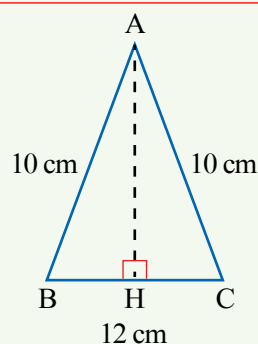


Fig. 8.17

C Ushtroni duke zbatuar

- Gjeni hipotenuzën e trekëndëshit kënddrejtë kur katetet e tij janë:
 - 6 dhe 8;
 - $\frac{3}{7}$ dhe $\frac{4}{7}$;
 - $\sqrt{2}$ dhe 3;
 - x dhe $2x$.
- Në trekëndëshin kënddrejtë, gjeni katetin b nëse hipotenuza c dhe kateti a janë përkatësisht:
 - 10 dhe 8;
 - 26 dhe 24;
 - 15 dhe 9;
 - $2a$ dhe a .
- Shkalla me gjatësi 5 m mbështetet në një pikë të murit që ndodhet në lartësinë 4 m mbi tokë. Sa larg murit është këmba e shkallës?

USHTRIME

- Gjeni katetin e trekëndëshit kënddrejtë, kur hipotenuza është 10 cm dhe këndi përballë katetit është: a) 30° ; b) 60° ; c) 45° .
- Gjeni lartësinë dhe syprinën e trekëndëshit barabrinjës nëse brinja e tij është: a) 12 cm; b) 1,2 cm; c) $2\sqrt{2}$ cm.
- Gjeni diagonalen e katrorit me brinjë 7 cm.
- Gjeni brinjën anësore të trekëndëshit barakrahës nëse janë dhënë: a) $b = 12$ cm, $h = 8$ cm; b) $b = 18$ cm dhe këndi në kulm është 120° .

8.5 Teorema e anasjellë e Pitagorës

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup



Fig. 8.18

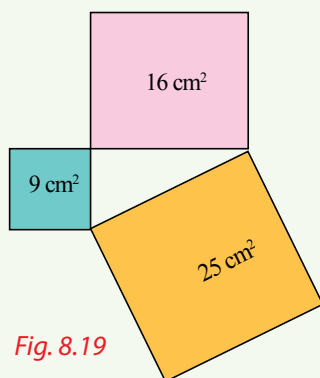


Fig. 8.19

Konstruktoni katrorët me brinjë 3 cm, 4 cm dhe 5 cm. Pritini katrorët. Njihsoni syprinat e tyre. Krahasoni shumën e syprinave të dy katrorëve të vegjël me syprinën e katrorit të madh.

Bashkoni katrorët në mënyrë të njëpasnjëshme që të kenë vetëm një kulm të përbashkët.

Matni këndet e trekëndëshit të formuar.

Përsëritni veprimet me katrorët me përmasa 4 cm, 3 cm, 6 cm.

Çfarë vini re?

Diskutoni me shokët/shoqet.

B Vrojtoni dhe mësoni

Nga veprimet e mësipërme vutë re se në rastin e parë nga bashkimi i katrorëve formohet trekëndësh kënddrejtë:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

Në rastin e dytë formohet një trekëndësh çfarëdo:

$$4^2 + 3^2 \neq 6^2$$

$$16 + 9 \neq 36$$



Mbani mend:

Teorema e anasjellë e Pitagorës

Teorema e Pitagorës mund të formulohet edhe kështu:

“Nëse në një trekëndësh, njëri kënd është i drejtë, atëherë katrori i brinjës përballë tij është i barabartë me shumën e katrorëve të dy brinjëve të tjera.”

Fjalja e anasjellë e Teoremës së Pitagorës është gjithashtu teoremë. Ajo formulohet kështu:

“Nëse në trekëndësh katrori i një brinje është i barabartë me shumën e katrorëve të dy brinjëve të tjera, atëherë këndi përballë kësaj brinje është i drejtë”.

Shembulli 1

Tregoni që trekëndëshi me brinjë 15 cm, 20 cm, 25 cm është trekëndësh kënddrejtë.

Zgjidhje

Provojmë nëse për tri brinjët e trekëndëshit është i vërtetë barazimi: $a^2 + b^2 = c^2$.

Duke zëvendësuar vlerat numerike, kemi:

$$15^2 + 20^2 = 25^2$$

$$225 + 400 = 625$$

$$625 \text{ cm}^2 = 625 \text{ cm}^2$$

Trekëndëshi me brinjë 15 cm, 20 cm, 25 cm është kënddrejtë, me hipotenuzë 25 cm.

Shembulli 2

A është trekëndësh kënddrejtë, trekëndëshi me brinjë 5 cm, 4 cm dhe 7 cm?

Zgjidhje

Provojmë nëse për tri brinjët e trekëndëshit është i vërtetë barazimi: $a^2 + b^2 = c^2$.

Syprina e katrorit të ndërtuar mbi brinjën më të madhe të trekëndëshit është 49 cm^2 . Syprinat e dy katrorëve të ndërtuar mbi brinjët e vogla janë 25 cm^2 dhe 16 cm^2 . Shuma e tyre është: $25 + 16 = 41 \text{ cm}^2 \neq 49 \text{ cm}^2$. Trekëndëshi nuk është trekëndësh kënddrejtë.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Tregoni nëse trekëndëshi me brinjët e dhëna është trekëndësh kënddrejtë.

- a) 6, 8, 10; b) 5, 6, 7; c) 9, 12, 15; d) 5, 12, 13.



2. Për të ndërtuar një kënd të drejtë, egjiptianët e lashtë bënë një në një litar, duke formuar 12 segmente të barabarta. Pastaj, me anë të këtij litari, formonin një trekëndësh, brinjët e të cilit të përmbanin përkatësisht 3, 4, 5 segmente.

Tregoni që njëri nga këndet e këtij trekëndëshi (ai përballë brinjës më të madhe) është me të vërtetë i drejtë.

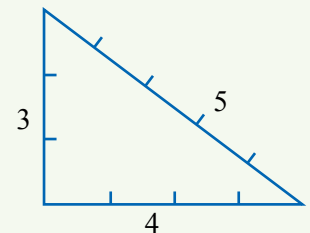


Fig. 8.20

USHTRIME

1 Matni katetet e trekëndëshave. Gjeni hipotenuzën, duke përdorur Teoremën e Pitagorës. Përdorni kalkulatorin për të gjetur një rrënjë të përafërt.

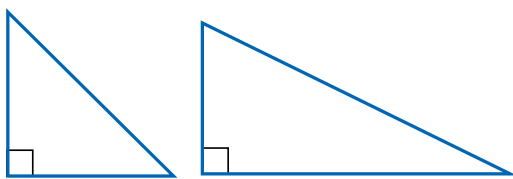
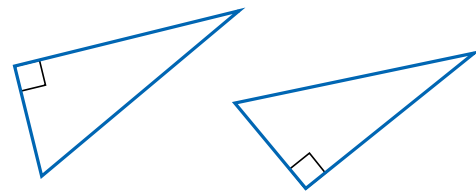


Fig. 8.21



2 Gjeni gjatësinë e hipotenuzës në secilin nga trekëndëshit në figurën 8.22, me saktësi deri në milimetrin më të afërt.

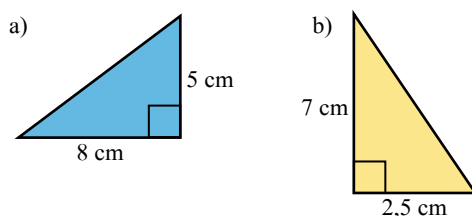


Fig. 8.22

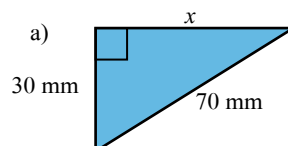
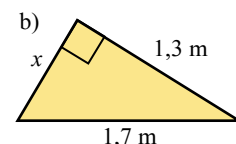


Fig. 8.23



3 Gjeni gjatësinë e brinjës së panjohur në secilin nga trekëndëshit në figurën 8.23. Përdorni kalkulatorin për të gjetur një rrënjë të përafërt.

4 Në figurë tregohet një shkallë e mbështetur në murin e shtëpisë. Gjeni gjatësinë e shkallës deri në cm më të afërt.

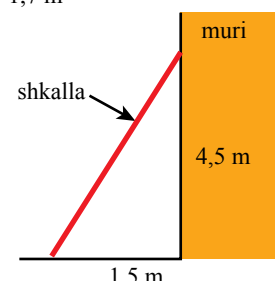


Fig. 8.24

8.6 Zbatime të Teoremës së Pitagorës

A Kërkoni dhe zbuloni

Një dhomë me përmasa 4 m me 5 m do të shtrohet me pllaka katrore me brinjë 25 cm. Për të kompletuar shtrimin e dhomës, pllakat do të priten në trekëndësja sipas njërës prej diagonaleve. Gjeni sa pllaka në formë trekëndëshi duhen për të përfunduar shtrimin e dhomës.

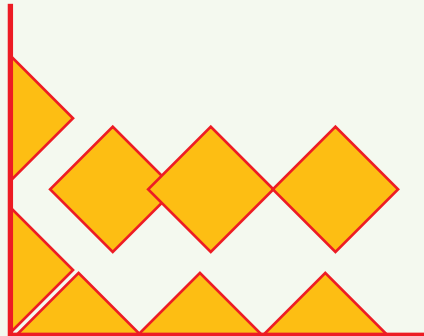


Fig. 8.25

Po nëse pllakat janë në formë drejtkëndëshi me përmasa 30 cm me 40 cm, sa pllaka trekëndëshe do të duhen?

Diskutoni me shokët/shoqet.

B Vrojtoni dhe mësoni

I. *Diagonalja e katrorit me brinjë a .*

Në figurën 8.26 është paraqitur katrori ABCD me brinjë a .

Zbatojmë në trekëndëshin kënddrejtë ABC Teoremën e Pitagorës.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$, pra $AC^2 = a^2 + a^2$, që nga $AC^2 = 2a^2$. Atëherë $AC = \sqrt{2a^2}$, d.m.th. $AC = a\sqrt{2}$.

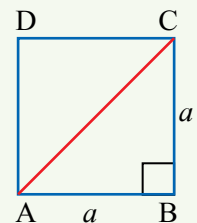


Fig. 8.26



Mbani mend:

Diagonalja e katrorit me brinjë a është $a\sqrt{2}$.

II. *Lartësia dhe syprina e trekëndëshit barabrinjës*

Le të jetë ABC një trekëndësh barabrinjës me brinjë a .

Lartësia [AH] është mesore e bazës, prandaj $HC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$.

Zbatojmë Teoremën e Pitagorës në trekëndëshin AHC.

Kemi: $AH^2 + HC^2 = AC^2$, d.m.th. $AH^2 + \left(\frac{1}{2} a\right)^2 = a^2$.

Nga ky barazim kemi: $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4} a^2$, pra $AH^2 = \frac{3a^2}{4}$. Kemi që $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Syprina e trekëndëshit ABC, si do ta shohim më vonë, është $S = \frac{1}{2} BC \cdot AH$.

Prandaj kemi: $S = \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2}$, d.m.th. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

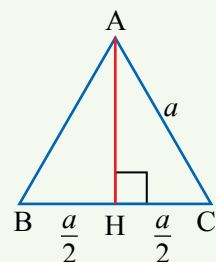


Fig. 8.27



Mbani mend:

Në trekëndëshin barabrinjës me brinjë a : lartësia është $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; syprina është $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni gjatësinë e diagonales të drejtkëndëshit me brinjë 5 cm dhe 12 cm.
2. Gjeni gjatësinë e brinjës së trekëndëshit barabrinjës me lartësi 5 cm.
3. Pranë një rruge, në largësinë 600 m prej saj është vendosur një projektor, që ndriçon deri 800 m. Gjeni gjatësinë e pjesës AB të rrugës që ndodhet nën ndriçimin e këtij projektori.

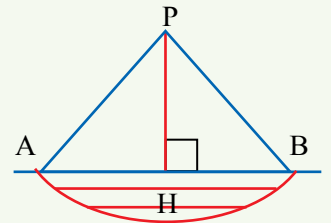


Fig. 8.28

USHTRIME

1. Në figurën 8.29 është paraqitur një trekëndësh barabrinjës me lartësi h .
a) Gjeni brinjën x të tij, duke përdorur teoremën e Pitagorës në trekëndëshin ABH.
b) A mund ta gjeni më thjesht brinjën?

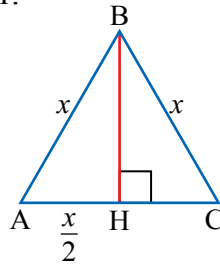


Fig. 8.29

2. Është dhënë trekëndëshi me brinjë 10, 24, 26 cm.
a) A është ky trekëndësh kënddrejtë?
b) Gjeni lartësinë e hequr mbi brinjën më të madhe.
3. Njehsoni brinjën e katrorit me diagonale të dhënë d .
4. Brenda një këndi të drejtë është dhënë një pikë A, që ka largesa 9 cm, 12 cm nga krahët e këndit. Gjeni largesën e pikës A nga kulmi i këndit.
5. Baza e trekëndëshit barakrahës është 18 m, kurse brinja anësore 15 m. Njehsoni lartësinë dhe syprinën e trekëndëshit.
6. Baza e një trekëndëshi (fig. 8.30) është 60 cm, lartësia mbi bazën 12 cm dhe mesorja e bazës 13 cm. Njehsoni brinjët anësore të trekëndëshit.

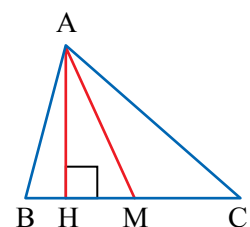


Fig. 8.30

8.7 Përsëritje. Kuptimi mbi syprinën. Syprina e drejtkëndëshit

A Kërkoni dhe zbuloni

Këmba më e madhe!

Vendosni këpucën tuaj në një fletë me katrorë me brinjë një centimetër.

- Vizatoni një vijë rreth këpucës suaj. Gjeni syprinën e përafërt të këmbës suaj.
- Krahasoni masën e këmbës suaj me atë të shokëve ose të shoqeve të tjera të klasës. Kush ka këmbën më të madhe?
- Përsëritni kërkesat (a) dhe (b) për të gjetur dorën më të madhe.
- A kanë shokët ose shoqet me këmbë të mëdha, edhe duar të mëdha?

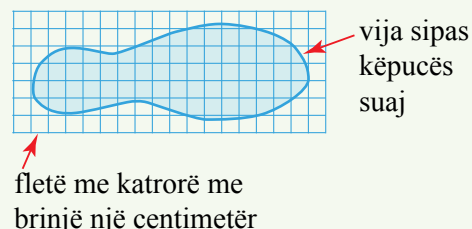


Fig. 8.31

B Vrojtoni dhe mësoni

I. Kuptimi i syprinës

Gjatë matjes së syprinës së figurës, ne e krahasojmë atë me një figurë tjetër, syprinën e të cilës e marrim si njësi. Si figurë e tillë merret zakonisht një katror me brinjë sa njësia e gjatësisë. Me anë të matjes vendoset një lidhje midis figurave dhe numrave (syprinave të tyre).



Mbani mend:

Duke zgjedhur një katror me brinjë sa njësia e gjatësisë, çdo figure i shoqërohet një numër, që quhet syprinë e saj, në mënyrë që:

- Syprina e çdo figure është një numër jonegativ.
- Syprina e katrorit me brinjë sa njësia e gjatësisë është numri 1.
- Figurat kongruente kanë syprina të barabarta.
- Nëse një figurë është ndarë në pjesë që nuk priten, atëherë syprina e saj është e barabartë me shumën e syprinave të këtyre pjesëve.

Nëse katrori e ka brinjën 1 m (1 cm) themi që syprina e tij është 1 m² (1 cm²).

II. Syprina e drejtkëndëshit



Mbani mend:

Syprina e drejtkëndëshit me brinjë a , b është $S = a \cdot b$.
Syprina e katrorit me brinjë a është a^2 .

Shembull

Gjeni brinjët e drejtkëndëshit nëse raporti i tyre është $\frac{4}{9}$ dhe syprina e tij është 144 cm².

Zgjidhje

Duke shënuar a , b brinjët e drejtkëndëshit, kemi të dhënë $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$ dhe $a \cdot b = 144$.

Nga barazimi $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$ nxjerrim $a = \frac{4}{9}b$. Duke e zëvendësuar këtë në barazimin $a \cdot b = 144$,

gjejmë: $(\frac{4}{9}b) \cdot b = 144$, që nga $\frac{4}{9}b^2 = 144$, d.m.th. $b^2 = \frac{144 \cdot 9}{4}$. Prej këtij, duke pasur

parasysh që $b > 0$, marrim $b = \sqrt{\frac{144 \cdot 9}{4}} = \frac{\sqrt{144} \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{4}} = 18$ cm.

Atëherë $a = \frac{4}{9}b = \frac{4}{9} \cdot 18$ cm = 8 cm.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Plotësoni vlerat që mungojnë:

Drejtkëndëshi	Gjatësia (në cm)	Gjerësia (në cm)	Syprina (në cm ²)
Fotografi	25	20	
Zarf	25		150
Libër	30		600
Poster		24	1200

2. Një qendër sportive ka dy fusha futbolli. Njëra është 115 m e gjatë dhe 60 m e gjerë, kurse tjetra është 105 m e gjatë dhe 85 m e gjerë.

Cila fushë futbolli ka syprinë më të madhe dhe sa më të madhe?

3. Një fotografi drejtkëndore i ka përmasat 15 cm me 12 cm. Ajo do të vendoset në një kornizë druri me përmasa 24 cm me 30 cm.

4. Sa është syprina e pjesës së kornizës së pambuluar nga fotografia?

USHTRIME

1 DysHEMEJA e një dhome me përmasa 3 m me 4 m do të shtrohet me pllaka. Pllakat janë katrorë me brinjë 20 cm. Sa pllaka duhen për të shtuar dhomën?

2 Alisa kishte nevojë për 15 m² copë për perde.

Ajo zgjodhi copa me gjerësi të ndryshme:

a) 90 cm; b) 1,2 m; c) 1,5 m.

Sa metra prej secilës copë duhet të blejë ajo?

3 Të gjenden syprinat e prerjeve tërthore të detaleve të paraqitura në figurën 8.32 (përmasat janë dhënë në mm).

4 Nëpër një fushë që ka formën e drejtkëndëshit

ABCD do të kalojë hekurudha. Dihet që

AB = 125 m; BC = 72,5 m; AL = KC = 114,6 m. Gjeni syprinën e zonës LBKD.

5 Një drejtkëndësh me perimetër 36 cm e ka gjatësinë sa dyfishi i gjerësisë. Gjeni syprinën e tij.

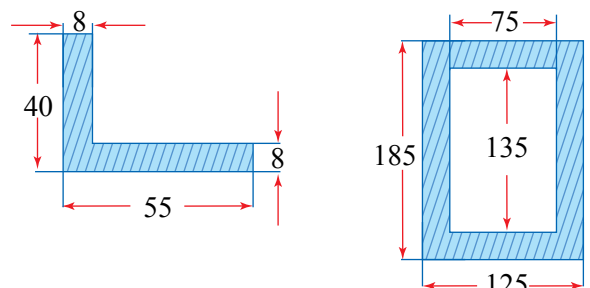


Fig. 8.32

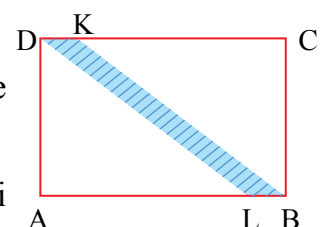


Fig. 8.33

8.8 Syprina e paralelogramit dhe trekëndëshit. Syprina e shumëkëndëshit të rregullt.

A Kërkoni dhe zbuloni

Konstruktioni një paralelogram. Hiqni lartësinë nga njëri kulm i paralelogramit. Në çfarë pjesësh ndahet paralelogrami? Pritni trekëndëshin dhe vendoseni si në figurë.

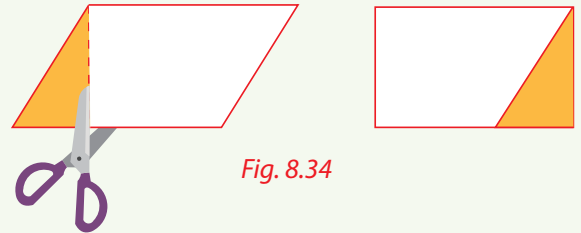


Fig. 8.34

Çfarë figure gjeometrike formohet?

Si e ka syprinën paralelogrami i konstruktuar në krahasim me figurën që u formua?

Diskutoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni

I. Syprina e paralelogramit

Në figurën 8.35 paraqitet paralelogrami me bazë me gjatësi

$AD = BC = b$ dhe lartësi mbi të me gjatësi $BH = CE = h$.

Vëmë re se paralelogrami ABCD dhe drejtkëndëshi HBCE

kanë baza të barabarta ($HE = BC$) dhe lartësi të barabarta ($BH = CE$). Shkruajmë: $S_{HBCE} + S_{ABH} = S_{ABCD}$ dhe $S_{HBCE} + S_{DCE} = S_{HBCE}$. Meqë anët e majta në këto barazime janë të barabarta, edhe anët e djathta janë të barabarta.

Pra, $S_{ABCD} = S_{HBCE}$. Meqë $S_{HBCE} = BC \cdot BH = b \cdot h$, del se $S_{ABCD} = b \cdot h$.

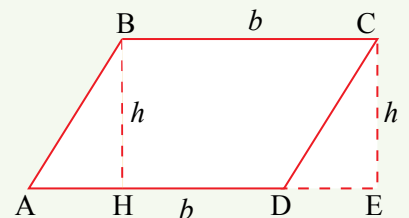


Fig. 8.35



Mbani mend:

Syprina e paralelogramit është e barabartë me prodhimin e bazës me lartësinë mbi të. Me formulë shënohet $S_p = b \cdot h$



Kujdes!

Duke qenë se paralelogrami ka dy lartësi, kemi

$$S_{ABCD} = AB \cdot DH = BC \cdot DE$$

II. Syprina e trekëndëshit

Në figurën 8.37, diagonalja AC e ndan paralelogramin në dy trekëndësha kongruentë, pra syprina e trekëndëshit është sa gjysma e syprinës së paralelogramit. Ajo jepet me formulën

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h, \text{ ku } b \text{ është baza dhe } h \text{ është lartësia mbi të.}$$

Fig. 8.36

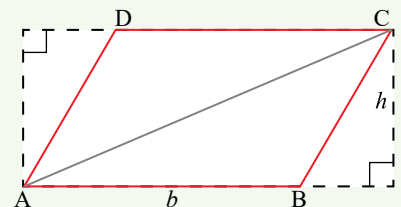
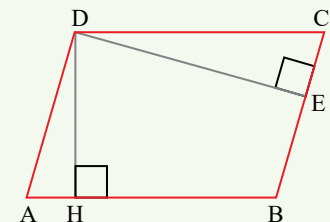


Fig. 8.37

III. Syprina e shumëkëndëshit të rregullt

Në figurën 8.38 jepet një gjashtëkëndësh i rregullt.

Ai formohet nga gjashtë trekëndësha barabrinjës, të cilët kanë për bazë brinjën e gjashtëkëndëshit dhe lartësi rrezen e rrethit të brendashkruar në të, kështu që ata kanë syprina të barabarta.

Syprina e gjashtëkëndëshit të rregullt është e barabartë me shumën

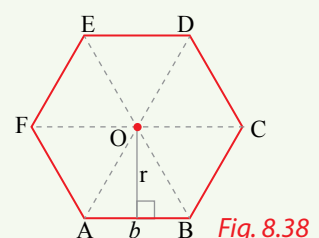


Fig. 8.38

e syprinave të gjashtë trekëndëshave të tillë. Syprina e secilit trekëndësh është $S = \frac{1}{2} b \cdot r$. Për gjashtëkëndëshin syprina jepet me formulën $S = 6 \cdot \frac{1}{2} b \cdot r$, ku b është brinja e gjashtëkëndëshit të rregullt dhe r është rrezja e rrethit të brendashkruar në të. Për sipërfaqen e n -këndëshit të rregullt, brinja e të cilit e ka gjatësinë a dhe rrezja e rrethit të brendashkruar e ka gjatësinë r , kemi: $S = n \cdot \frac{1}{2} b \cdot r$.



Punë në grup

Konstruktioni një drejtkëndësh me përmasa 4 cm dhe 6 cm. Njihsoni syprinën e tij. Konstruktioni njërën diagonale. Në sa trekëndësja kënddrejtë do të ndahet drejtkëndëshi? Sa është syprina e secilit prej tyre? Tregoni si mund të njihsohet syprina e trekëndëshit kënddrejtë kur njihen katetet e tij.

Shembull

Gjeni syprinën e tetëkëndëshit të rregullt me gjatësi të brinjës $b = 8$ cm dhe rreze të rrethit të brendashkruar $r = 9,66$ cm.

Zgjidhje

Zëvendësojmë vlerat e b , r dhe n në formulën e syprinës

$$S = n \cdot \frac{1}{2} b \cdot r = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 9,66 \text{ cm} = 309,12 \text{ cm}^2.$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Gjeni syprinën e paralelogramit me bazë 8 cm dhe lartësi sa gjysma e bazës. Sa paralelogramë të tillë kemi?
2. Në trekëndëshin ABC kemi $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm, kurse lartësia e hequr mbi brinjën $[AB]$ është 11 cm. Gjeni lartësinë e hequr mbi brinjën $[BC]$.
3. Konstruktioni një gjashtëkëndësh të rregullt me brinjë 5 cm. Konstruktioni rrethin e brendashkruar në të. Matni rrezen e rrethit të brendashkruar. Njihsoni syprinën e gjashtëkëndëshit.
4. Duke hequr drejtëza që kalojnë nga një kulm i parcelës trekëndore, ndajeni atë në tri pjesë trekëndore që kanë syprina të barabarta.

USHTRIME

- 1 Paralelogrami me bazë 36 cm dhe katrori me brinjë 12 cm kanë syprina të barabarta. Gjeni lartësinë e paralelogramit.
- 2 Gjeni syprinën e paralelogramit me bazë 20 cm dhe lartësi sa $\frac{3}{5}$ e bazës.
- 3 Në një paralelogram, lartësia është sa 75% e bazës. Shuma e gjatësisë së bazës dhe lartësisë është 14 cm. Gjeni syprinën.
- 4 Syprina e trekëndëshit kënddrejtë është 120 cm^2 . Gjeni katetet, nëse raporti i tyre është $\frac{3}{5}$.
- 5 Gjeni syprinën e deltoidit me diagonale 3 cm dhe 7 cm.

8.9 Syprina e rombit, deltoidit, trapezit

A Kërkoni dhe zbuloni

Skiconi një romb me diagonale 6 cm; 8 cm.

- Si janë diagonalet e rombit?
- Në sa trekëndësja kënddrejtë ndahet rombi? Si janë këta trekëndësja?
- Gjeni syprinën e njërit trekëndësh, pastaj syprinën e rombit.
- Krahasoni syprinën e rombit me prodhimin $6 \cdot 8$.

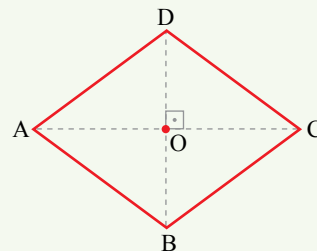


Fig. 8.39

B Vrojtoni dhe mësoni

I. Syprina e rombit

Në figurë është paraqitur rombi ABCD, me diagonale me gjatësi

$AC = d_1$ dhe $BD = d_2$.

Diagonalet janë pingule njëra me tjetrën dhe priten në mesin e tyre. Prandaj $AO = OC$ dhe $OB = OD$. Ato e ndajnë rombin në 4 trekëndësja kënddrejtë, kongruentë ndërmjet tyre. Prandaj syprina e rombit është sa katërfishi i syprinës së njërit prej tyre.

Syprina e trekëndëshit kënddrejtë AOB është: $s = \frac{1}{2} AO \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{8}$

Si rrjedhim, syprina e rombit është $S = 4 \cdot s = 4 \cdot \frac{d_1 d_2}{8} = \frac{d_1 d_2}{2}$.



Mbani mend:

Syprina e rombit është e barabartë me gjysmën e prodhimit të diagonaleve të tij.



Punë në grup

Konstruktioni një deltoid me diagonale 4 cm dhe 6 cm. Njehsoni syprinën e tij. Përsërisni veprimet për deltoidin me diagonale 5 cm dhe 7 cm. Si mund të njehsohet syprina e deltoidit me diagonale d_1 dhe d_2 ?

II. Syprina e trapezit

Në figurën 8.40 paraqitet trapezi ABCD me baza me gjatësi $AB = a$; $DC = b$ dhe lartësi me gjatësi $DE = h$.

Ndërtojmë $[BH] \perp [DC]$ dhe bashkojmë pikën B me pikën D. Kemi $DE = HB = h$. (Pse?)

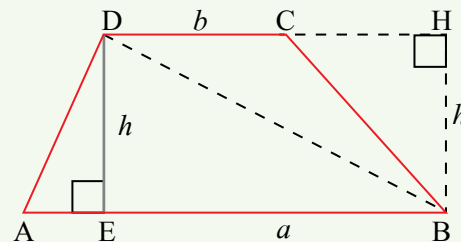


Fig. 8.40

Shkruajmë: $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} a \cdot h$;

$S_{BDC} = \frac{1}{2} DC \cdot BH = \frac{1}{2} b \cdot h$.

Por $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC}$. Duke zëvendësuar, kemi: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} h \cdot (a + b)$.



Mbani mend:

Syprina e trapezit me baza a dhe b dhe lartësi h , njehsohet me formulën: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Shembulli 1

Syprina e një trapezi është 28 cm^2 . Baza e vogël dhe lartësia e tij janë secila 4 cm . Gjeni bazën e madhe të trapezit.

Zgjidhje

Janë dhënë $S = 28 \text{ cm}^2$; $b = h = 4 \text{ cm}$. a -baza e madhe. Zëvendësojmë në formulën e syprinës:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \Rightarrow \frac{a+4}{2} \cdot 4 = 28 \Rightarrow a+4 = 14 \Rightarrow a = 10 \text{ cm. Baza e madhe është } 10 \text{ cm.}$$

Shembulli 2

Diagonalet e një deltoidi e kanë gjatësinë 10 cm dhe 6 cm . Njesoni syprinën e tij.

Zgjidhje

Gjatë punës në grup, dolët në përfundimin se syprina e deltoidit, kur njohim diagonalet e tij, njesohet me formulën:

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$\text{Duke zëvendësuar kemi: } S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{10 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Gjeni syprinën e rombit me diagonale 10 cm dhe 14 cm .
2. Gjeni syprinën e trapezit me baza $a = 14 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$ dhe lartësi $h = 5 \text{ cm}$.
3. Arbri do të konstruktonte një balonë në formën e një deltoidi me diagonale 80 cm dhe 60 cm . Njesoni syprinën e balonës.

USHTRIME

- 1 Syprina e një deltoidi është 24 cm^2 . Njesoni diagonalet e tij, duke ditur që gjatësitë e tyre janë në raportin 3 me 4.
- 2 Në figurën 8.41, ABCD është trapez kënddrejtë, në të cilin $\angle ABC = 45^\circ$. Jepet $AB = 11 \text{ cm}$ dhe $DC = 3 \text{ cm}$. Gjeni syprinën e trapezit.

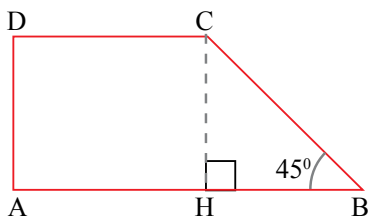


Fig. 8.41

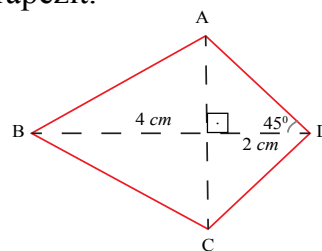


Fig. 8.42

- 3 Gjeni perimetrin dhe syprinën e deltoidit të dhënë në figurën 8.42.
- 4 Në një trapez, baza e madhe është sa dyfishi i bazës së vogël. Gjeni syprinën e tij, në qoftë se baza e vogël dhe lartësia janë nga 10 cm .
- 5 Syprina e trapezit është 105 cm^2 . Gjeni lartësinë e tij, në qoftë se bazat janë në raportin $\frac{4}{3}$ dhe ndryshimi i tyre është 3 cm .

8.10 Syprina e qarkut (sipërfaqes rrethore)

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 8.43, qarkut me rreze r i është jashtëshkruar një katror, brinja e tij është $2r$.
Në figurën 8.44, këtij qarku i është brendashkruar një katror, diagonalet e të cilit janë $2r$.

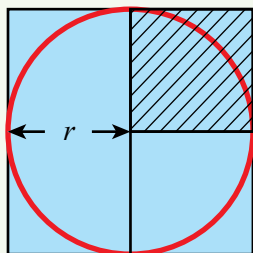


Fig. 8.43

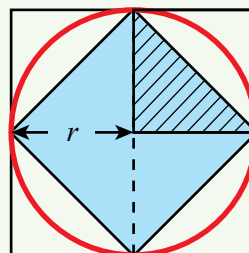


Fig. 8.44

- Gjeni syprinat e secilit katror.
 - Ndërmjet cilëve numra ndodhet syprina e qarkut?
- Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Vizatojmë një qark me rreze r dhe e ndajmë atë në 16 pjesë të barabarta.

Gjatësia e rrethit (perimetri) është $2\pi r$, prandaj gjatësia e një gjysmërrethi është πr . Pritni sektorët e qarkut dhe pastaj ngjitini ata me njëri-tjetrin, si tregohet në figurë.

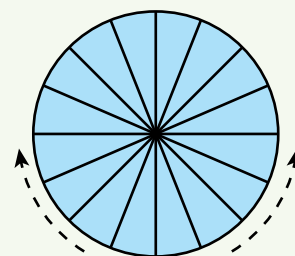


Fig. 8.45

Sektor i fundit është ndarë në dysh dhe secila gjysmë e tij është vendosur në njërin nga skajet e figurës.

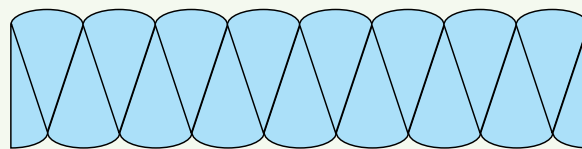


Fig. 8.46

Figura e krijuar është afërsisht drejtkëndësh. Lartësia e këtij drejtkëndëshi është r , kurse baza e tij është sa gjysma e perimetrit të rrethit (d.m.th πr). Syprina e drejtkëndëshit është $\pi r \cdot r = \pi r^2$.



Mbani mend:

Syprina e qarkut me rreze r është $S = \pi r^2$, ku $\pi \approx 3,14$.

Vërtetohet se formula $S = \pi r^2$ për syprinën e qarkut (të cilën e gjetët me përafërsi) është e saktë për çdo qark me rreze r .

Shembull

Gjeni syprinën e qarkut me rreze $r = 4$ cm.

Zgjidhje

$$S = \pi r^2 = 3,14 \cdot (4 \text{ cm})^2 = 3,14 \cdot (16 \text{ cm}^2) = 50,24 \text{ cm}^2.$$

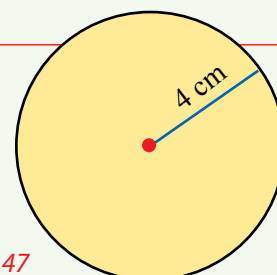


Fig. 8.47

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni syprinën e secilit qark në figurën 8.48.
2. Një qark e ka diametrin d . Sa është syprina e tij?
3. Nga një pllakë katrore me brinjë 14 cm është prerë qarku më i madh i mundshëm. Sa është syprina e tij?

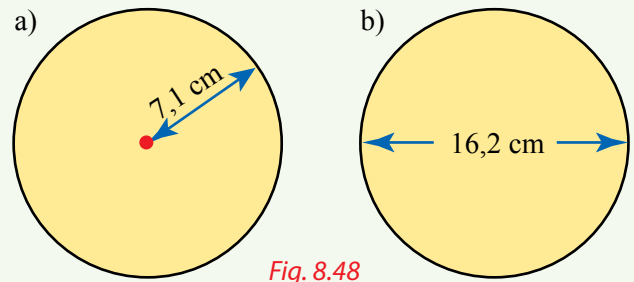


Fig. 8.48

USHTRIME

- 1 Gjeni syprinën e qarkut me diametër: a) 20 cm; b) 24,6 cm.
- 2 Gjeni rrezen e qarkut me syprinë të dhënë: a) 314 cm^2 ; b) $12,56 \text{ cm}^2$; c) 100 cm^2 .
- 3 Gjeni syprinën e zonave të ngjyrosura në figurë.

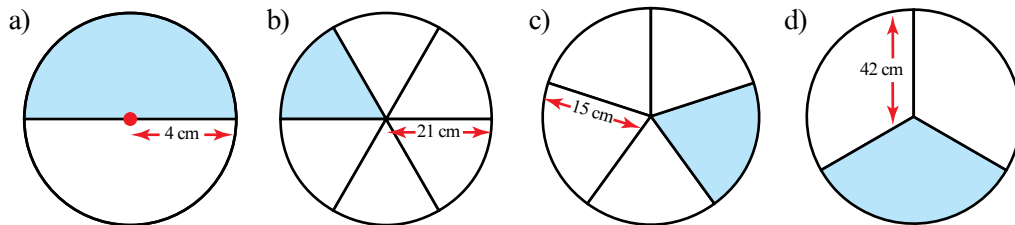


Fig. 8.49

- 4 Gjeni syprinën e secilës figurë (fig. 8.50).

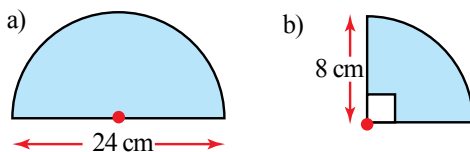


Fig. 8.50

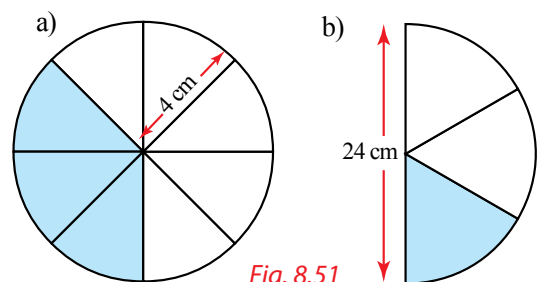


Fig. 8.51

- 5 Gjeni syprinën e pjesës së ngjyrosur në figurë (fig. 8.51).
- 6 Gjeni syprinën e pjesës së ngjyrosur në secilën figurë.

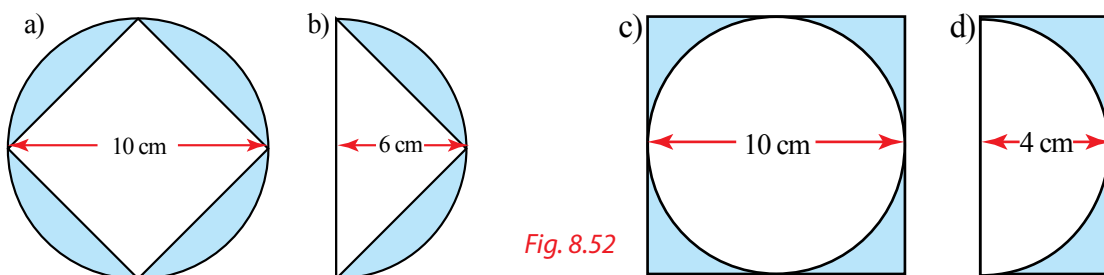


Fig. 8.52

- 7 Gjej syprinën e pjesës së ngjyrosur në secilën figurë.

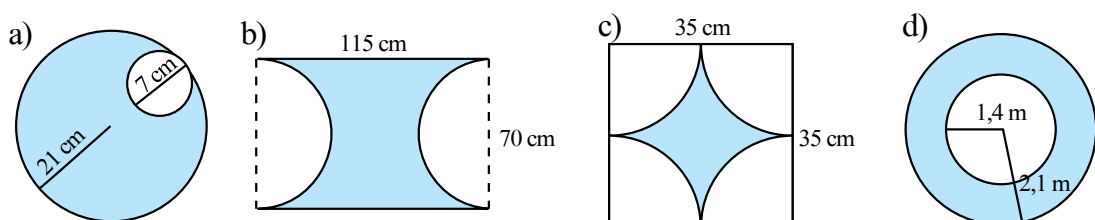


Fig. 8.53

8.11 Syprinat e figurave të përbëra

A Kërkoni dhe zbuloni

Në sa trekëndësha është ndarë katërkëndëshi konveks?

Gjeni syprinën e tij.

Diskutoni me shokët/shoqet.

B Vrojtoni dhe mësoni

Dini se syprina e një figure që përbëhet nga disa pjesë që nuk priten, është sa shuma e syprinave të këtyre pjesëve.

Shumëkëndëshi i dhënë në figurë përbëhet nga një paralelogram dhe një trekëndësh, prandaj syprina e tij gjendet duke mbledhur syprinën e paralelogramit me atë të trekëndëshit.

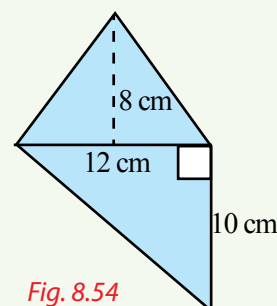


Fig. 8.54

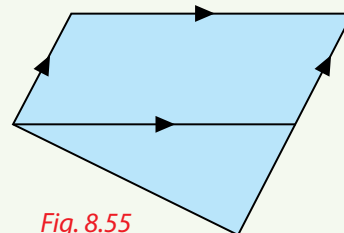


Fig. 8.55



Mbani mend:

Për të gjetur syprinën e një figure çfarëdo, e ndajmë atë në figura gjeometrike që nuk priten, të cilave u njehsojmë syprinën me anë të formulave. Syprina e figurës është sa shuma e syprinave të pjesëve përbërëse të saj.

Shembull

Gjeni syprinën e secilës figure:

Zgjidhje

a) Figura përbëhet nga dy paralelograme, që kanë secili bazën 10 cm dhe lartësinë 3 cm. Syprina e njërit paralelogram është $s = b \cdot h = 10 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2$.

Prandaj syprina e figurës është:

$$S = 2 \cdot s = 2 \cdot 30 \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2.$$

b) Syprina e figurës (e pjesës së ngjyrosur) gjendet duke zbritur nga syprina e drejtkëndëshit të madh syprinën e katrorit të brendshëm. Syprina e drejtkëndëshit është $S = 12 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 84 \text{ cm}^2$. Syprina e katrorit është $s = (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$.

Prandaj syprina e zonës së ngjyrosur është:

$$S - s = 84 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2 = 75 \text{ cm}^2.$$

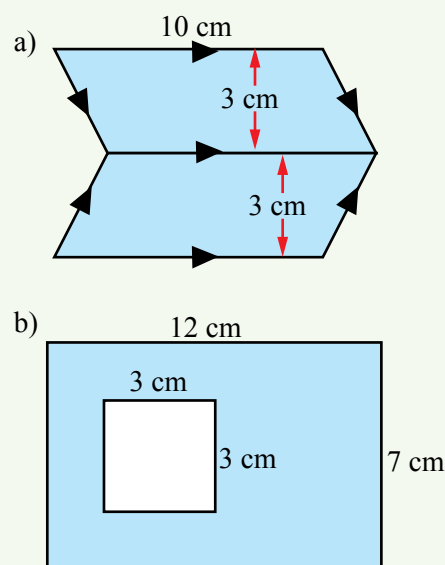


Fig. 8.56

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Gjeni syprinën e figurës së ngjyrosur.

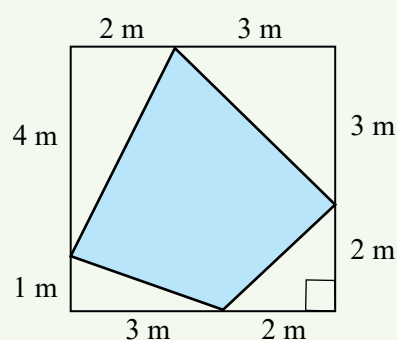


Fig. 8.57

2. Gjeni syprinën e figurës (fig. 8.58).

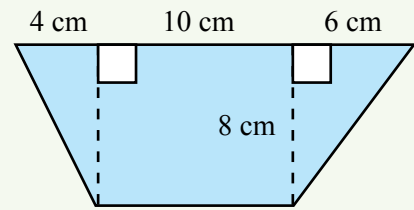


Fig. 8.58

3. Gjeni syprinat e pjesëve të ngjyrosura në këto figura.

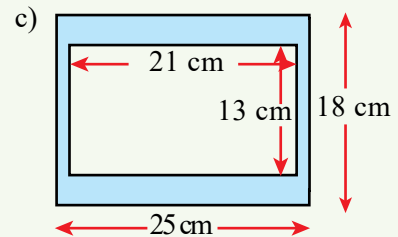
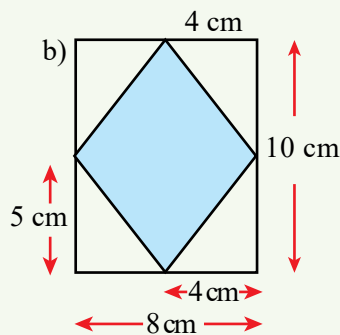
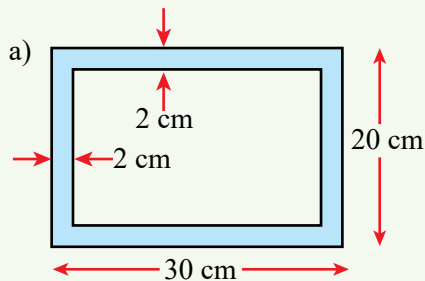


Fig. 8.59

4. Në figurën 8.60 paraqitet një pllakë e vjetër gramafoni me diametër 29 cm. Diametri i etiketës në qendër është 7 cm. Gjeni syprinën e pjesë së ngjyrosur me të gjelbër të pllakës.

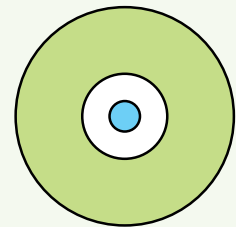


Fig. 8.60

USHTRIME

1 Gjeni syprinën e pjesës së ngjyrosur në këto figura.

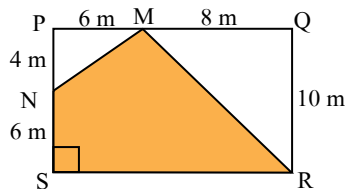


Fig. 8.61

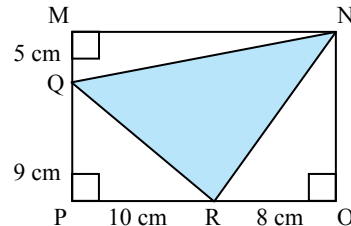


Fig. 8.62

2 Gjeni syprinat e pjesëve të ngjyrosura në figurën 8.63.

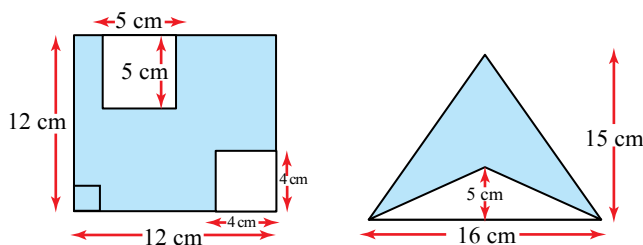


Fig. 8.63

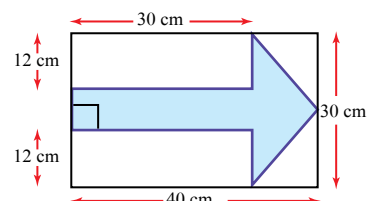
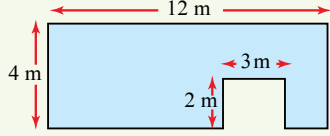
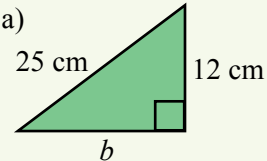
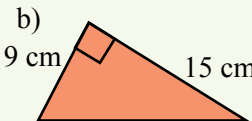
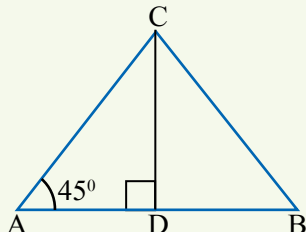


Fig. 8.64

- 3 Nga një fletë metalike drejtkëndore me përmasa 30 cm me 40 cm po pritet një shigjetë, siç tregohet në figurën 8.64. Gjeni syprinën e shigjetës.
- 4 Për të bërë një pankartë, Alba preu një katror me brinjë 37 cm prej një katrori me brinjë 63 cm. Ç'pjesë e katrorit të madh mbeti?
- 5 Fasada e një shtëpie me tulla ka gjerësi 10 m dhe lartësi 6 m. Në të gjenden 4 dritare, secila me përmasa 2,5 me 1,5 m. Sa është syprina e pjesës së fasadës që do të suvatohet?

8.12 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar	Provoni të zgjidhni
Zgjedhjen e njësive standarde për matje të gjatësisë, sipërfaqes, si dhe shpjegimin e marrëdhënieve ndërmjet njësive të ndryshme të matjeve gjatë zgjidhjes së problemave.	- Plotësoni me njësinë matëse më të përshtatshme: - Gjatësia e lapsit - _____. - Përmasat e dritares - _____. - Sipërfaqja e klasës - _____. - Sipërfaqja bujqësore - _____. - Gjatësia e Albit është 1,68 m, ndërsa e motrës së tij është 1,2 dm më pak. Sa është gjatësia e motrës së tij?
Njehsimin e perimetrit në figura dydimensionale me anë të formulave dhe me matje.	- Gjeni perimetrin e figurës 8.65. - Brinja e katrorit është 5 cm e 6 mm. Shprehni perimetrin e katrorit në: - centimetra; - milimetra. - Gjeni syprinën e trapezit me baza 18 cm e 12 cm dhe lartësi sa $\frac{3}{4}$ e bazës së vogël.  <i>fig. 8.65</i>
Vërtetimin dhe zbatimin e Teoremës së Pitagorës për njehsimin e gjatësisë së hipotenuzës apo katetit të trekëndëshi kënddrejtë.	- Gjeni gjatësinë e brinjës së panjohur në secilin nga trekëndëshit. Përdorni kalkulatorin për të gjetur një rrënjë katrore të përafërt.   <i>Fig. 8.66</i>
Zbatimin e Teoremës së anasjellë të Pitagorës për të caktuar nëse një trekëndësh është kënddrejtë ose jo.	- A është kënddrejtë trekëndëshi me brinjë 7 cm, 12 cm, 13 cm? - Nëse brinjët e trekëndëshit kënddrejtë janë numra të plotë, sa mund të jetë brinja e tretë e tij nëse $a = 3$ cm, $b = 4$ cm?
Zbatimin e Teoremës së Pitagorës për njehsimin e lartësisë të trekëndëshi barakrahës dhe barabrinjës, si dhe për njehsimin e diagonales të drejtkëndëshi dhe katrori.	- Gjeni diagonalen e drejtkëndëshit me brinjë 12 cm dhe 16 cm. - Gjeni brinjën e trekëndëshit barabrinjës me lartësi 6 cm. - Në figurë jepet $AD = 2$ cm; $BD = 4$ cm dhe $m(\angle CAB) = 45^\circ$. Gjeni syprinën e trekëndëshit ABC.  <i>Fig. 8.67</i>

Njehsimin e perimetrit të shumëkëndëshave (paralelogrami, trekëndëshi, trapezi, deltoidi) me anë të formulave.	12. Perimetri i tetëkëndëshit të rregullt është 56 cm. Gjeni gjatësinë e brinjës së tij. 13. Bazat e një trapezi janë 12 cm dhe 8 cm. Njëra nga brinjët anësore është sa gjysma e bazës së madhe, ndërsa brinja tjetër anësore është 1,5 herë sa baza e vogël. Gjeni perimetrin e trapezit.
Njehsimin e syprinës së sipërfaqes shumëkëndëshe (paralelogrami, trekëndëshi, trapezi, deltoidi) me anë të formulave.	14. Brinjët e një drejtkëndëshi janë në raportin 1 : 2. Gjeni syprinën e tij, në qoftë se perimetri është 24 cm. 15. ABCD është romb me brinjë 5 cm. Diagonalet e tij kanë gjatësi $AC = 8$ cm dhe $BD = 6$ cm. Gjeni gjatësinë OE. <i>Fig. 8.68</i>
Njehsimin e perimetrit dhe syprinës së sipërfaqes rrethore.	16. Rrezja e një rrethi është 5 cm. Sa është rrezja e rrethit me perimetër tri herë më të madh? 17. Sa herë rritet perimetri i rrethit, në qoftë se rrezja e tij rritet katër herë?
Zbërthimin e figurave jo të rregullta në figura të thjeshta dydimensionale, për të gjetur perimetrin dhe syprinën e tyre.	18. Fusha e stadiumit përbëhet nga një drejtkëndësh dhe dy gjysmaqarku. Gjeni syprinën e saj. Përmasat janë dhënë në metra. <i>Fig. 8.69</i> 19. Gjeni perimetrin dhe syprinën e pjesës së ngjyrosur. <i>Fig. 8.70</i>
Përdorimin e formulave për njehsimin e perimetrit dhe të syprinës së sipërfaqeve shumëkëndëshe dhe rrethore në detyra nga jeta e përditshme.	20. Një pjesë e lulishtes e mbjellë me lule, e ka formën si në figurë. Gjeni perimetrin dhe syprinën e saj. <i>Fig. 8.71</i> 21. Të gjendet syprina e një unaze, në qoftë se diametri i vogël i saj është 4 cm, ndërsa diametri i madh sa 150% e diametrit të vogël. <i>Fig. 8.72</i>

8.13 Vlerësim

Koha: 45 minuta

- 1 Përmasat e një drejtkëndëshi janë 2 cm, 8 cm. Gjeni:
 - a) diagonalen e drejtkëndëshit; (2 pikë)
 - b) brinjën e katrorit që ka të njëjtën syprinë me drejtkëndëshin. (2 pikë)
- 2 Tregoni nëse është kënddrejtë trekëndëshi me brinjët 5 cm, 6 cm, 7 cm. (2 pikë)
- 3 Sa herë rritet syprina e qarkut, në qoftë se rrezja e tij rritet 2 herë? (2 pikë)
- 4 Është dhënë trekëndëshi kënddrejtë me katete 12 cm, 16 cm.
 - a) Gjeni hipotenuzën. (2 pikë)
 - b) Gjeni lartësinë mbi hipotenuzë. (3 pikë)
- 5 Brinjët e një paralelogrami janë 12 cm dhe 20 cm. Lartësia mbi brinjën e parë është 10 cm. Gjeni:
 - a) syprinën e paralelogramit; (2 pikë)
 - b) lartësinë mbi brinjën e dytë. (2 pikë)
- 6 Gjeni lartësinë më të vogël të trekëndëshit me brinjë 10 cm, 10 cm, 16 cm. (2 pikë)
- 7 Gjeni syprinën e figurave të përbëra. (4 pikë)

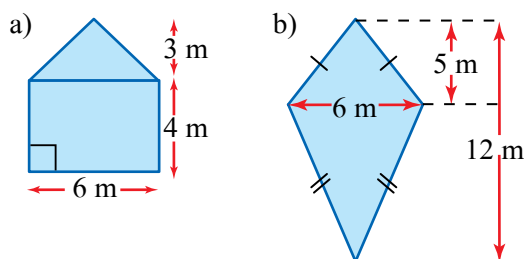


Fig. 8.73

- 8 Gjeni syprinën e pjesës së ngjyrosur. (3 pikë)

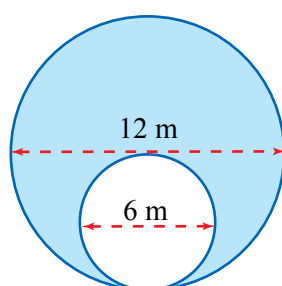


Fig. 8.74

- 9 Sipërfaqja me manushaqe në një lulishte e ka formën si figurë. Njehsoni syprinën e saj.

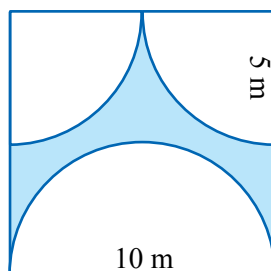


Fig. 8.75

9

SHPREHJET ME NDRYSHORE, EKUACIONE, INEKUACIONE

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- zbaton radhën e veprimeve aritmetike dhe kllapave në shprehjet me shkronja;
- njehson vlerat e shprehjeve shkronjore për vlera të dhëna të shkronjave;
- zgjidh ekuacionet lineare me një të panjohur (me numra të plotë dhe racionalë);
- zgjidh inekuacionet lineare me një të panjohur (me numra të plotë dhe numra racionalë);
- paraqet zgjidhjet e inekuacioneve në drejtëzën numerike dhe formon bashkësinë numerike të zgjidhjeve;
- modelon dhe zgjidh ekuacione dhe inekuacione me numra të plotë dhe racionalë.



Fjalë kyçe:

shprehje shkronjore, vlerë të shprehjes, radhë të veprimeve në shprehje, shprehje të njëvlershme, ekuacion, rrënjë e ekuacionit, zgjidhje e ekuacionit, inekuacion, zgjidhje të inekuacionit, paraqitja grafike.

A E DINI SE...?



Ekuacionet dhe inekuacionet përdoren gjerësisht në jetën e përditshme.

Kur shkoni në një dyqan, ju duhet të llogarisni sasinë e parave që do të shpenzoni në varësi të çmimit të artikullit që do të blini. Shpejtësia e një makine (v) lidhet me kohën (t) që i duhet asaj për të përshkruar një rrugë (s).

Gjatë ndërtimit të urave, inxhinierët duhet të zgjidhin ekuacione, që të jenë të sigurt se ura do të mbajë peshën për të cilën është projektuar.

Kur motori i një automjeti nxehtet më shumë se një temperaturë e caktuar, (për shembull, 103°C), termostati duhet të shkaktojë hapjen e valvulës, në mënyrë që uji të qarkullojë dhe motori të ftohet. Në qoftë se temperatura e motorit ulet nën një temperaturë të caktuar (për shembull, 82°C), termostati duhet të shkaktojë mbylljen e valvulës. Për këtë informacion mund të përdoret inekuacioni $T < 103^{\circ}\text{C}$ dhe $T > 82^{\circ}\text{C}$, për të ruajtur temperaturën e duhur të motorit të automjetit.



9.1 Shprehje shkronjore (shprehje me ndryshore)

A Kërkoni dhe zbuloni

Bileta e autobusit nga qyteti në bregdet kushton 12 euro për të rriturit dhe 6 euro për fëmijët.

- Sa kushtojnë biletat për pesë të rritur?
- Sa kushtojnë biletat për shtatë fëmijë?
- Sa kushtojnë biletat për dy të rritur dhe tre fëmijë?
- Po nëse udhëtojnë x të rritur dhe y fëmijë, sa kushtojnë biletat?

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Me anë të numrave, ndryshoreve, shenjave të veprimeve dhe kllapave mund të formohen shprehje me ndryshore.

Në këtë kapitull do të shqyrtojmë vetëm shprehje që merren duke kryer mbi ndryshoret vetëm veprimet e mbledhjes (zbritjes), të shumëzimit (pjesëtimit) dhe të ngritjes në fuqi. Për to do të përdorim shkurt termin **shprehje algjebrike**.

Shembulli 1

Shkruani me anë të shkronjave shprehjen: “shumëzoni me dy numrin n dhe shtojni pesë”.

Zgjidhje

E fillojmë me numrin: n
 E shumëzojmë me dy: $2n$
 I shtojmë pesë: $2n + 5$

Shembulli 2

Një kilogram mollë kushton m euro dhe një kilogram pjeshkë kushton n euro. Shkruani me shprehje shkronjore sasinë e eurove për 7 kg mollë; 5 kg pjeshkë; për 7 kg mollë dhe 5 kg pjeshkë.

Zgjidhje

7 kg mollë kushtojnë: $7m$
 5 kg pjeshkë kushtojnë: $5n$
 7 kg mollë dhe 5 kg pjeshkë kushtojnë: $7m + 5n$

Shembulli 3

Gjeni syprinën e drejtkëndëshit në figurë.

Zgjidhje

Syprina = gjatësi $\cdot$ gjerësi =
 $= 3p \cdot 2q =$
 $= 3 \cdot p \cdot 2 \cdot q =$
 $= 6pq.$

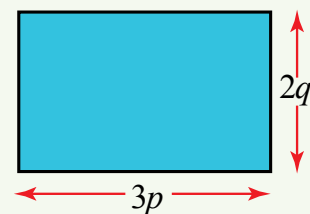


Fig. 9.1

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Shkruani shprehjet e mëposhtme nëpërmjet shprehjeve shkronjore:
 - prodhimi i numrit y me 3;
 - numrin x shumëzojeni me 3 dhe shtojni 4;
 - numrin a pjesëtojeni me 6 dhe shtojni 2.

2. Në një akuarium janë x peshq. Agimi shtoi aty edhe 5 peshq të tjerë. Sa peshq janë aty tani?
3. Teuta është m vjeçe.
a) Sa vjeçe ka qenë ajo 4 vjet më parë? b) Sa vjeçe do të jetë ajo 6 vjet më vonë?
4. Një laps kushton p centë dhe një vizore kushton r centë. Shkruani shprehjen që tregon sa kushtojnë: a) 3 lapsa; b) 5 vizore; c) 3 lapsa e 7 vizore.
5. Në një testim, Zana mori 15 pikë më shumë se Bardha, e cila mori x pikë. Drini mori y pikë më shumë se Zana.
a) Sa pikë mori Zana? b) Sa pikë mori Drini? c) Sa pikë morën Drini dhe Zana së bashku?

USHTRIME

- 1 Numrin x zbriteni nga numri 8. Numrin që gjetët, trefishojeni. Shkruani shprehjen.
- 2 Një shirit është y cm i gjatë. Drita preu 3 cm prej tij. Sa është gjatësia e shiritit tani?
- 3 Jetmiri, Arbeni dhe Ermali kanë disa lapsa. Arbeni ka 5 lapsa më shumë se Jetmiri. Ermali ka 2 lapsa më shumë se Jetmiri. Nëse Arbeni ka x lapsa, sa lapsa ka Jetmiri? Po Ermali?
- 4 Një filxhan kafe kushton c centë dhe një filxhan çaj kushton d centë. Shkruani shprehjen që tregon se sa kushtojnë: a) 3 filxhanë kafe; b) 5 filxhanë çaj dhe 2 filxhanë kafe.
- 5 Shkruani shprehjen që jep perimetrin e secilës prej figurave.

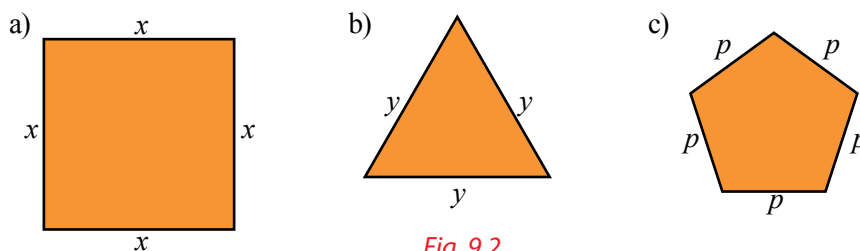


Fig. 9.2

- 6 Lidhni fjalitë matematike me shprehjet sipas shembullit të dhënë.

Zbrisni 2 nga x dhe e shumëzoni me 5.	$5(x + 2)$
I shtoni 2 x dhe e shumëzoni me 5.	$5 - 2x$
Shumëzoni x me 2 dhe e zbrisni nga 5.	$5x - 2$
Shumëzoni x me 5 dhe i zbrisni 2.	$2x + 5$
Shumëzoni x me 2 dhe i shtoni 5.	$5(x - 2)$

Fig. 9.3

- 7 Një laps kushton m centë. Një stilolaps kushton n centë. Çiftoni secilën nga shprehjet me fjalë me shprehjen përkatëse me simbole.

Fig. 9.4

Pagesa për 4 lapsa.	$4(n + m)$
Pagesa për 4 lapsa dhe 4 stilolapsa.	$4m$
Sa më shumë kushtojnë 4 stilolapsa në krahasim me 4 lapsa?	$4 - 4n$
Nëse kishit 4 euro dhe bletë 4 stilolapsa, sa euro ju tepruan?	$4n - 4m$

9.2 Vlera numerike e një shprehjeje shkronjore

A Kërkoni dhe zbuloni

Një fletore kushton 2,5 euro. Një libër kushton 6 euro.

- Nëse Agimi blen x fletore dhe y libra, sa euro duhet të paguajë ai?
- Sa euro i kushtojnë Agimit 3 fletore dhe 2 libra? 5 fletore dhe 3 libra? 5 fletore dhe 1 libër?

Në cilin nga rastet duhet të shpenzojë një shumë më të madhe parash? Diskutoni me shokët/shoqet.



B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Nëse shkronjat që figurojnë në një shprehje algjebrike i zëvendësojmë me numra dhe më pas kryejmë veprimet, do të marrim *vlerën numerike* të asaj shprehjeje për numrat e dhënë.

Kuptohet që vlera numerike e shprehjes algjebrike varet nga vlerat e numrave që zëvendësojmë në të.

Shembulli 1

Në qoftë se $x = 2$ dhe $y = 3$, gjeni vlerën e shprehjeve:

- $5x - 2y$;
- $4y(1 + x)$.

Zgjidhje

- $5x - 2y = 5 \cdot x - 2 \cdot y = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 10 - 6 = 4$.
- $4y(1 + x) = 4 \cdot y \cdot (1 + x) = 4 \cdot 3 \cdot (1 + 2) = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Shembulli 2

Gjeni vlerën e shprehjeve të mëposhtme, nëse: $a = 3$, $b = 4$ dhe $c = 5$.

- $7a + c$;
- $4 + 2c$;
- $ab - bc$.

Zgjidhje

- $7a + c = (7 \cdot 3) + 5 = 21 + 5 = 26$.
- $4 + 2c = 4 + (2 \cdot 5) = 4 + 10 = 14$.
- $ab - bc = (3 \cdot 4) - (4 \cdot 5) = 12 - 20 = -8$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Gjeni vlerën e shprehjeve, nëse $a = 5$ dhe $b = 6$:

- $a + 7$;
- $a - \frac{1}{2}b$;
- $3a + 2\frac{1}{2}b$;
- $3b - 2a$;
- $b(3 + a)$.

- Gjeni vlerën e shprehjeve, nëse $x = 3$ dhe $y = 4$:

- $x + 2y$;
- $\frac{1}{2}y - 2x$;
- $\frac{2xy}{3}$;
- $x - 3y$;
- $\frac{1}{2}x - 3y$.

3. Gjeni vlerën e shprehjeve, nëse $p = 2$; $q = 4$ dhe $r = 2$:

a) $p + q + r$;

b) $p + q - r$;

c) $2p + 3q + 4r$;

d) $\frac{1}{2}p - 4q - \frac{1}{2}r$;

e) $2p + \frac{2}{3}q - 2r$.

f) $p + \frac{2}{3}q - r$.



4. Shkruani një shprehje për numrin:

a) e gramëve nëse keni k kilogramë dhe m gramë;

b) e metrave në k kilometra dhe s metra;

c) e ditëve në $2x$ javë dhe 4 ditë.

USHTRIME

1 Gjeni vlerën e shprehjeve të mëposhtme, nëse $a = 15$ dhe $b = 2$:

a) $a + 4$;

b) $2a - \frac{1}{2}b$;

c) $53a + 2b$;

d) $7b - \frac{1}{2}a$;

e) $a(4 + 2a)$.

2 Gjeni vlerën e shprehjeve, nëse $p = 3$; $q = 4$ dhe $r = -2$:

a) $p + 2q + 3r$;

b) $\frac{3}{4}p + \frac{3}{2}q - 3r$;

c) $2p - 3q + 4r$;

d) $3p - 4q - 2r$;

e) $3p - 4q$.

3 Nëse $x = 8$, cila prej shprehjeve numerike $x + 6$; $21 - x$; $2x - 2$ e ka vlerën numerike numër tek?

4 Gjeni vlerën e x , për të cilën shprehjet e mëposhtme kanë të njëjtën vlerë numerike. $2x + 1$; $22 - x$ dhe $3x - 6$.

5 Shkruani perimetrin (P) e figurës së mëposhtme. Gjeni vlerën e P , nëse $a = 5$ cm, $b = 3$ cm dhe $c = 4$ cm.

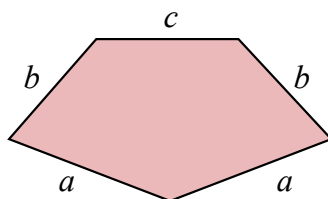


Fig. 9.5

6 Shkruani shprehjen shkronjore për të gjetur perimetrin dhe syprinën e figurës së mëposhtme. Gjeni vlerën numerike të saj për $x = 5$ cm; $x = 5,5$ cm.



Fig. 9.6

7 Shkruani shprehjen shkronjore për të gjetur perimetrin e figurave të dhëna. Jepini disa vlera ndryshores dhe gjeni vlerën numerike të shprehjes.

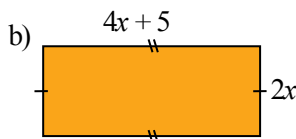
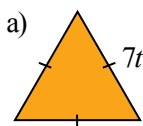
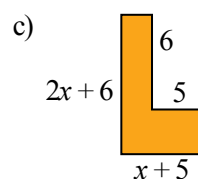


Fig. 9.7



9.3 Shprehje identike

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Jepen shprehjet $1 + x$ dhe $x + 1$.

Gjeni vlerat e shprehjeve për $x = -2$; $x = -\frac{1}{2}$; $x = 0$; $x = \frac{1}{3}$.

Krahasoni vlerat për secilin rast. Përsëritni veprimet për shprehjet $2x - 2$ dhe $2(x - 1)$.

Çfarë vini re?

B Vrojtoni dhe mësoni

Vutë re se vlerat përgjegjëse të shprehjeve $x + 1$ dhe $1 + x$, për të njëjtën vlerë të x , janë të barabarta. Kjo ndodh jo vetëm për vlerat e x që shqyrtoam, por për çdo vlerë të x nga Q . Shprehje të tilla quhen **identike**.



Mbani mend:

Dy shprehje quhen identike nëse, për çdo vlerë të ndryshores, ato i kanë vlerat përgjegjëse të barabarta.

Zëvendësimi i çdo shprehjeje me një shprehje tjetër, identike me të, quhet **shndërrim identik i shprehjes**.

Dy shprehje identike i lidhim me shenjën ($=$), duke marrë një barazim të vërtetë për çdo vlerë të ndryshores.

Për të përfutur shprehje identike me një shprehje të dhënë, ne mund të përdorim vetitë e njohura të mbledhjes dhe të shumëzimit. I rikujtojmë ato.

i. Vetitë e mbledhjes (zbritjes)

Nëse a , b , c janë numra ose ndryshore, për çdo vlerë të tyre kanë vend barazimet.

$$a + b = b + a;$$

$$a + (b + c) = a + b + c;$$

$$a + 0 = a;$$

$$a + (-a) = 0;$$

$$a - b = a + (-b).$$

ii. Vetitë e shumëzimit

Nëse a , b , c janë numra ose ndryshore, për çdo vlerë të tyre kanë vend barazimet.

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c;$$

$$a \cdot 0 = 0;$$

$$a \cdot 1 = a;$$

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a.$$

Veç këtyre kanë vend **vetitë e përdasisë së shumëzimit** në lidhje me mbledhjen dhe me zbritjen:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Shembulli 1

Duke përdorur vetitë e shumëzimit, mund të shkruajmë:

$$(-2,5) \cdot x \cdot 4 = (-2,5) \cdot 4 \cdot x = -10x.$$

Shembulli 2

Duke zbatuar vetitë e përndasisë, mund të bëjmë të tilla shndërrime identike:

$$3(5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 15 + 12 = 27; \quad 2(x + 5) = 2 \cdot x + 2 \cdot 5 = 2x + 10;$$

$$-3(x + 4) = -3 \cdot x + (-3) \cdot 4 = -3x - 12; \quad -2(x - 1) = -2 \cdot x - (-2) \cdot 1 = -2x + 2.$$

Shndërrime të tilla i quajmë **zbërthime të shprehjeve**.

**Kujdes!**

Duket sikur në shprehjet $(x - y)$ dhe $-(x - y)$ nuk ka faktorë para kllapës. Në të vërtetë, duke pasur parasysh që $a = +a = 1 \cdot a$ dhe $-a = (-1) \cdot a$, këto shprehje mund të shkruhen $1 \cdot (x - y)$ dhe $(-1) \cdot (x - y)$.

Duke përdorur vetinë e përndasisë kemi:

$$1 \cdot (x - y) = 1 \cdot x - 1 \cdot y = x - y; \quad (-1) \cdot (x - y) = (-1) \cdot x - (-1) \cdot y = -x + y.$$

Pra, $(x - y) = x - y$ dhe $-(x - y) = -x + y$.

**Mbani mend:**

Nëse para kllapave qëndron shenja (+), ne mund t'i heqim ato, pa ndryshuar shenjën e kufizave. Nëse para kllapave qëndron shenja (-), ne mund t'i heqim ato, duke i ndërruar shenjën në të kundërt çdo kufize.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. A janë identike shprehjet?

a) $2 \cdot x$ dhe $x \cdot 2$; b) $(-1) \cdot x$ dhe $-x$.

2. Zbërtheni shprehjet:

a) $3(4 - x)$; b) $-6(x - 1)$; c) $+(x + 5)$; d) $-(x - 2)$.

3. Zgjidhni ekuacionet:

a) $2(x - 1) = 2$; b) $3x + 5 = 8$; c) $-3(x + 2) = 0$; d) $\frac{1}{2}(x + 1) = \frac{1}{2}$.

4. Oborri i shkollës ka formën e drejtkëndëshit me përmasa gjerësi x m dhe gjatësi dyfishin e gjerësisë. Si mund ta gjejmë syprinën e saj, nëse perimetri i oborrit është 90 m?

**USHTRIME**

1 Gjeni vlerën e shprehjeve të mëposhtme për $a = -2$.

a) $3a - 5$; b) $2a + 4$; c) $\frac{1}{2}a + 1$; d) $1,5a - 1$.

2 Gjeni vlerën e shprehjes $2a - 4$ për vlerat e mëposhtme të a -së.

a) $-2,5$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0 ; d) $\frac{3}{2}$.

3 Zbërtheni shprehjet:

a) $3(x + 2)$; b) $-2(x + 3)$; c) $4(1 - x)$; d) $-5(x - 1)$.

4 Shkruani si prodhim dy faktorësh:

a) $4x - 4y$; b) $2x + 2y$; c) $2x - 4$; d) $3x + 3y + 3$.

5 Hiqni kllapat në shprehjet:

a) $2(3 + a) - 10$; b) $20 + 15(x - 2)$; c) $-3(y - 2) - 4$; d) $28 + 4(y - 9)$.

9.4 Kufizat me ndryshore. Reduktimi i kufizave të ngjashme

A Kërkoni dhe zbuloni



Punë në grup

Kujtoni vetitë e fuqive. Kryeni shndërrime identike të shprehjeve:

a) $x^2 \cdot x^4$; b) $(-2x)^4$; c) $\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2 \cdot 2x$. Argumentoni veprimet.

B Vrojtoni dhe mësoni

Shprehjet $5x^2$; $(-3)x \cdot (2x)^2$; ax^4 ; $\frac{1}{4}x^3x$ janë prodhime të numrave, të ndryshoreve dhe të fuqive të tyre. Këto shprehje janë **kufiza me ndryshore**.



Mbani mend:

Kufiza me ndryshore quhet shprehja që merret duke kryer, mbi numrat dhe ndryshoret, vetëm veprimet e shumëzimit dhe të ngritjes në fuqi.

Kufizën me ndryshore $(-3) \cdot x^2 \cdot 2x^4$ mund ta thjeshtojmë, duke përdorur vetitë e ndërrimit dhe të shoqërimit të shumëzimit $(-3) \cdot x^2 \cdot 2x^4 = 2 \cdot (-3) \cdot x^2 \cdot x^4 = -6x^6$. Kthyer kufizën në trajtë të rregullt.



Mbani mend:

Një kufizë me ndryshore ka trajtë të rregullt nëse:

- I. ka vetëm një faktor numerik;
- II. nuk ka kllapa;
- III. nuk ka fuqi të ndryshme, me të njëjtën bazë.

Kur kufiza është kthyer në trajtë të rregullt, faktorin numerik të tij e quajmë **koeficient të kufizës shkronjore**. P.sh.: për kufizën $(-3) \cdot x^2 \cdot 2x^4$, koeficienti është -6 .

II. Reduktimi i kufizave të ngjashme

Kufizat $5x$; $-2y$; $3ax$; $0,5x^2$; $7xy$ kanë trajtë të rregullt, por i kanë pjesët shkronjore të ndryshme. Kufizat $4ax$; $-\frac{5}{2}ax$; $1,4ax$ i kanë pjesët e tyre shkronjore të njëjta. Kufiza të tilla quhen **të ngjashme**.



Mbani mend:

Dy ose më shumë kufiza quhen të ngjashme, kur në trajtat e tyre të rregullta, pjesët shkronjore së bashku me fuqitë e tyre, i kanë të njëjta.

Thjeshtimi i shprehjeve mund të vazhdojë më tej, duke zëvendësuar në të, shumën (ndryshimin) e disa kufizave të ngjashme me një kufizë të vetme.

Për këtë përdorim vetinë e përdasisë së shumëzimit.

Shembulli 1

- a) $3x + 5x = (3 + 5)x$ d.m.th. $3x + 5x = 8x$; b) $4xy - 2xy + 5xy = (4 - 2 + 5)xy = 7xy$.

Për të mbledhur kufizat e ngjashme mjafton të mbledhim koeficientet e tyre. Ky veprim quhet shpesh **reduktim i kufizave të ngjashme** në shprehje.

**Mbani mend:**

Për të mbledhur (reduktuar) disa kufiza të ngjashme, veprohet kështu:

1. mblidhen koeficientet e tyre;
2. shuma e gjetur shumëzohet me pjesën shkronjore të përbashkët.

Shembulli 2

Thjeshtoni shprehjen $-2x^2 + 3ax + 6x^2 - ax$.

Zgjidhje

Në këtë shprehje ka kufiza të ngjashme. Duke përdorur vetitë e mbledhjes dhe të përdasisë, shkruajmë:

$$-2x^2 + 3ax + 6x^2 - ax = (-2x^2 + 6x^2) + (3ax - ax) = (-2 + 6)x^2 + ax(3 - 1) = 4x^2 + 2ax.$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Ktheni në trajtë të rregullt kufizat e mëposhtme dhe gjeni koeficientet e tyre.

a) $2x^3 \cdot (-4) \cdot x$; b) $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 \cdot x^3$; c) $(-4x) \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)$.

2. Thjeshtoni shprehjet, duke bërë reduktimin e kufizave të ngjashme.

a) $5x - 7x$; b) $2,5x^2 - 1,5x^2$; c) $4a - 7a + 10a$.



3. Një gotë ka kapacitet v mililitra. Në fillim, në gotë hidhen 50 ml esencë limoni dhe më pas ujë derisa të mbushet. Diana mori esencë limoni dhe 2 litra ujë për të përgatitur 5 gota me pije.

- a) Shkruani një shprehje shkronjore për sasinë e ujit që duhet të shtohet në një gotë me kapacitet v ml, pasi i është hedhur sasia e esencës së limonit.
- b) Shkruani një shprehje për sasinë e ujit që ka mbetur në shishe, pasi u përgatitën 5 gotat me pije.
- c) Njehsoni vëllimin e ujit të mbetur në shishen 2-litërshe, nëse $v = 250$ ml.

USHTRIME

- 1** Sillni në trajtë të rregullt dhe gjeni koeficientet e kufizat me ndryshore:

a) $(2x) \cdot (4x)$; b) $(-3x) \cdot (4x^2)$; c) $\left(\frac{1}{2}x\right)(4a^2)$; d) $\left(\frac{1}{3}x\right)^2 15y$.

- 2** Thjeshtoni shprehjen, duke hapur kllapat e duke bërë më tej reduktimin e kufizave të ngjashme:

a) $2(x - 3) + 4(x + 5)$; b) $3(1 - x) - 6(x + 2)$;
c) $0,5(x + 1) - 1,5(x - 1)$; d) $3(x^2 - 4) - 2x^2$.

- 3** Plotësoni piramidën sipas rregullit: shprehja në secilën kuti është sa shuma e shprehjeve në dy kutitë që ndodhen poshtë saj.

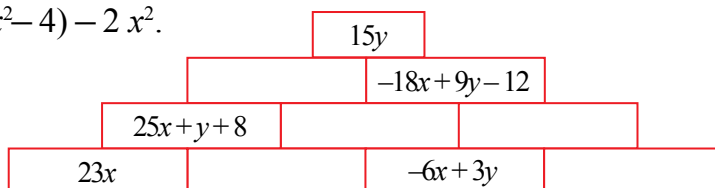


Fig 9.8

9.5 Ekuacione me një ndryshore. Ekuacione të njëvlershme

A Kërkoni dhe zbuloni

Një lulishte në formë drejtkëndëshi i ka përmasat si në figurë. Gjeni sa metra tel nevojitet për të rrethuar lulishten.

Diskutoni me shokët/shoqet.

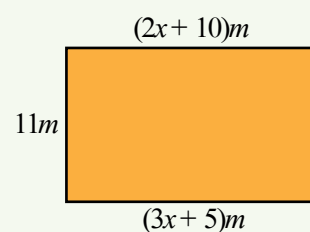


Fig. 9.9

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Ekuacion quhet barazimi shkronjor (me ndryshore) për të cilin kërkohet vlera e shkronjës (ndryshore), që e kthen atë në barazim numerik të vërtetë.

Kjo vlerë e shkronjës (ndryshore) quhet **zgjidhje (rrënjë) e ekuacionit**.

Të zgjidhësh ekuacionin do të thotë të gjesht të gjitha zgjidhjet e tij ose të tregosh që ai nuk ka asnjë zgjidhje.

Duke zgjidhur ekuacionet $6x + 4 = 28$; $3x + 2 = 14$, vëmë re se kanë të njëjtën zgjidhje, numrin 4. Po kështu, ekuacionet $2x - 2 = 4$ dhe $4x - 4 = 8$ kanë të njëjtën zgjidhje, numrin 3. Ekuacione të tilla quhen **të njëvlershme (ekuivalente)**.



Mbani mend:

Dy ekuacione me të njëjtën ndryshore quhen të njëvlershme, nëse kanë zgjidhje të njëjta.

Kur dy ekuacione janë të njëvlershme, çdo zgjidhje e ekuacionit të parë është zgjidhje e ekuacionit të dytë dhe anasjelltas, çdo zgjidhje e ekuacionit të dytë është edhe zgjidhje e ekuacionit të parë.

Për zgjidhjen e ekuacioneve përpiqemi t'i shndërrojmë ato në ekuacione të njëvlershme, por më të thjeshta, derisa të arrijmë në një ekuacion, zgjidhja e të cilit është evidente.

Ka disa shndërrime që na lejojnë të kalojmë nga një ekuacion në një tjetër, të njëvlershëm me të, siç tregohet në rregullat pasuese.

I. Nëse në njërën anë të ekuacionit bëjmë shndërrime identike, marrim një ekuacion të njëvlershëm me të.

Shembulli 1

Ekuacioni $5x + 2x = 14$ është i njëvlershëm me ekuacionin $7x = 14$, sepse kemi zëvendësuar shprehjen $5x + 2x$ me shprehjen $7x$, identike me të.

II. Nëse kalojmë kufizën nga njëra anë e ekuacionit në anën tjetër të tij, duke i ndërruar shenjën asaj, marrim një ekuacion të njëvlershëm me të parin.

Shembulli 2

- a) Ekuacioni $2x + 5 = 7$ është i njëvlershëm me $2x = 7 - 5$;
- b) Ekuacioni $7 - x = 3$ është i njëvlershëm me $7 = 3 + x$.

III. Nëse të dyja anët e ekuacionit i shumëzojmë apo i pjesëtojmë me të njëjtin numër, të ndryshëm nga zero, marrim një ekuacion të njëvlershëm me të parin.

Shembulli 3

Ekuacioni $\frac{x+1}{3} = 5$ është i njëvlershëm me $x + 1 = 5 \cdot 3$. Janë shumëzuar të dyja anët me 3 dhe është bërë thjeshtimi te thyesa.

Ekuacioni $-2x = 7 + 4$ është i njëvlershëm me $2x = -11$. Janë shumëzuar të dyja anët me -1 .

Ekuacioni $5x = 20$ është i njëvlershëm me $x = 4$. Janë pjesëtuar të dyja anët me 5.

C Ushtroni duke zbatuar

1. A janë të njëvlershme ekuacionet $3x - 5 = 10$ dhe $2 - x = 1$?
2. A janë të njëvlershme ekuacionet?
 - a) $5x - 4x = 7 + 3$ dhe $x = 10$;
 - b) $x^2 + 2x - x^2 = 3$ dhe $2x = 3$;
 - c) $2(x - 5) = 7$ dhe $2x - 10 = 7$;
 - d) $2(x - 5) = 7$ dhe $2x - 5 = 7$?
3. A janë të njëvlershme ekuacionet?
 - a) $2x - 10 = 1$ dhe $2x = 10 + 1$;
 - b) $3x - 5 = 10$ dhe $3x = 15$;
 - c) $5x + 7 = 2x - 1$ dhe $5x - 2x = -1 - 7$;
 - d) $5x + 7 = 2x - 1$ dhe $5x + 2x = -1 - 7$?
4. A janë të njëvlershme ekuacionet?
 - a) $\frac{x-5}{2} = 4$ dhe $x - 5 = 8$;
 - b) $-3x = 9$ dhe $x = -3$?
5. Perimetri i një fushe volejboli në formë drejtkëndëshi është 54 m. Sa janë përmasat e fushës, nëse gjatësia është sa dyfishi i gjerësisë së fushës?

USHTRIME

- 1 A janë të njëvlershme ekuacionet?
 - a) $x + 1 = 5$ dhe $x - 2 = 6$;
 - b) $x = 3$ dhe $3x = 6$;
 - c) $2x = 24$ dhe $x + 10 = 22$?
- 2 Jepen ekuacionet:
 - a) $4x - 2x = 19$;
 - b) $x - 5 = 0,4$;
 - c) $(4 - x)\frac{1}{2} = 3x + x$.

Formoni ekuacione të njëvlershme me to, duke përdorur shndërrimin I (rregullën I).
- 3 Për ekuacionet e ushtrimit 2, formoni ekuacione të njëvlershme me to, duke përdorur:
 - a) rregullën II; b) rregullën III.
- 4 Shndërroni ekuacionet më poshtë në ekuacione të njëvlershme:
 - a) $5(2x + 5) - 3x = 0$;
 - b) $2(x - 1) + 2 - x = 0$;
 - c) $4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 6\left(2x + \frac{3}{2}\right) = 0$.
- 5 Shndërroni ekuacionet më poshtë në ekuacione të njëvlershme:
 - a) $4(2y - 1) + 3(2 - 3y) = 0$;
 - b) $(4u - 1) - 3(u + 1) = 0$;
 - c) $-(y - 5) + 5(1 - y) = 0$.
- 6 Zgjidhni ekuacionet e mëposhtme, me mënyrat që njihni:
 - a) $3 - 2x = 11$;
 - b) $14 = 8 + 3x$;
 - c) $3(x - 2) = 6 - x$;
 - d) $(4x - 1) \cdot 2 + 8 = 1$.
- 7 Duke ditur se shprehja në secilën kuti është sa shuma e shprehjeve në dy kutitë që ndodhen poshtë saj, gjeni x.

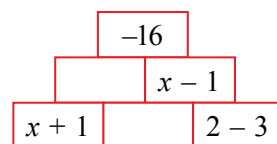


Fig. 9.10

9.6 Ekuacioni linear i trajtës $a \cdot x = b$ dhe ekuacione të njëvlershme me të

A Kërkoni dhe zbuloni

Një kg mollë kushton 1,5 euro. Gjeni sa euro kushtojnë 3 kg mollë; 5 kg mollë; x kg mollë. Agimi ka 9 euro. Sa kg mollë mund të blejë me to? Shkruani ekuacionin për zgjidhjen e ushtrimit. Diskutoni për trajtën e ekuacionit.



B Vrojtoni dhe mësoni

Nëse ekuacioni linear ka trajtën $a \cdot x = b$, ku a, b janë numra të njohur dhe $a \neq 0$, duke pjesëtuar të dyja anët me numrin $a \neq 0$, marrim ekuacionin e njëvlershëm $x = \frac{b}{a}$, që duket qartë se ka si zgjidhje numrin $\frac{b}{a}$.



Mbani mend:

Kur $a \neq 0$, ekuacioni linear e trajtës $a \cdot x = b$ ka një zgjidhje të vetme, numrin $\frac{b}{a}$.



Punë në grup

- A ka vlerë të x që vërteton barazimin $0 \cdot x = 2$? A ka zgjidhje ekuacioni $0 \cdot x = 2$?
- A ka vlerë të x që nuk vërteton barazimin $0 \cdot x = 0$? A ka numër që nuk është zgjidhje e këtij ekuacioni?



Mbani mend:

Nëse $a = 0$ dhe $b \neq 0$, ekuacioni $a \cdot x = b$ nuk ka zgjidhje.

Nëse $a = 0$ dhe $b = 0$, ekuacioni $a \cdot x = b$ ka si zgjidhje çdo numër.

Nëse ekuacioni që duam të zgjidhim, nuk është në trajtën $a \cdot x = b$, përpiqemi ta sjellim atë në këtë trajtë, duke bërë shndërrime të njëvlershme.

Shembulli 1

Zgjidhni ekuacionin $4(x - 1) + 3 = 2x + 3$.

Zgjidhje

Ekuacioni $4(x - 1) + 3 = 2x + 3$ është i njëvlershëm me $(4x - 4) + 3 = 2x + 3$ (shndërrim identik, rregulla I).

$4x - 1 = 2x + 3$ (shndërrim identik, rregulla I)

$4x - 2x = 3 + 1$ (rregulla II)

$2x = 4$ (rregulla I)

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ (rregulla III)

$x = 2$ (rregulla I). Ekuacioni i fundit ka vetëm një zgjidhje, numrin 2. Prandaj edhe ekuacioni fillestar, i njëvlershëm me të, ka vetëm një zgjidhje, numrin 2.

Shembulli 2

Zgjidhni ekuacionin $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = \frac{1}{4}$.

Zgjidhje

Meqë kemi thyesa, shumëzojmë me SHVP e emëruesve të tyre për t'i eliminuar. SHVP në rastin tonë është 12.

Ekuacioni $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = \frac{1}{4}$ është i njëvlershëm me $12\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{6}\right) = 12 \cdot \frac{1}{4}$ (shndërrim identik,

rregulla III), me $12 \cdot \frac{x}{2} - 12 \cdot \frac{x}{6} = 12 \cdot \frac{1}{4}$ (shndërrim identik, rregulla I), me $6x - 2x = 3$

(rregulla I), me $4x = 3$ (rregulla I), me $\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 3$ (rregulla III), me $x = \frac{3}{4}$ (rregulla I).

Si përfundim, ekuacioni i dhënë ka vetëm një zgjidhje, numrin $\frac{3}{4}$.

**Mbani mend:**

Për të zgjidhur një ekuacion me një ndryshore, ndjekim këta hapa:

1. shumëzojmë të dyja anët me SHVP e emëruesve (nëse ka thyesa);
2. kryejmë shndërrimet identike në secilën anë;
3. kalojmë në anën e majtë kufizat që përmbajnë ndryshoren dhe në anën e djathtë kufizat e tjera;
4. kryejmë shndërrime identike në secilën anë;
5. nëse arrijmë në ekuacion të trajtës $ax = b$, ku $a \neq 0$, pjesëtojmë të dyja anët e ekuacionit me a dhe gjejmë zgjidhjen.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Zgjidhni ekuacionet: a) $4(x - 1) = 2x + 8$; b) $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = x$.
2. Zgjidhni ekuacionet: a) $3 - (8x + 1) = 5x + 3$; b) $3(4x - 5) = 5(x - 4)$; c) $7(3x + 2) = 6 - 3(2x - 3)$.
3. Në një bidon ka 3 herë më shumë qumësht se në një bidon tjetër. Nëse nga i pari zbrazim 20 litra në të dytin, sasia e qumështit në të dy bidonët do të bëhet e njëjtë. Sa litra qumësht ka në secilin bidon?

USHTRIME

- 1 Zgjidhni ekuacionet: a) $3 - 2x = 11$; b) $14 = 8 + 3x$; c) $3(x - 2) = 6 - x$; d) $8y - 4(3 - y) = 1$.
- 2 Zgjidhni ekuacionet: a) $\frac{3x - 2}{5} = 2$; b) $\frac{x}{7} - \frac{1}{3} = 0$; c) $\frac{5x}{6} - 2 = \frac{3x}{4}$; d) $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} - \frac{3}{10} = 0$.
- 3 Zgjidhni ekuacionet: a) $2\left(x + \frac{1}{4}\right) = 2x + 3$; b) $3x + 3 - x = 2x + 3$.
- 4 Zgjidhni ekuacionet: a) $\frac{1}{6}x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{4}x - \frac{1}{8}x = \frac{5}{24} + \frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$.

9.7 Problema që zgjidhen me ekuacione me një ndryshore

A Kërkoni dhe zbuloni

Perimetri i trekëndëshit ABC është 30 cm. Brinja [AC] është 2 cm më e madhe se [BC], kurse brinja [AB] është 4 cm më e madhe se brinja [BC]. Sa cm është brinja [BC]? A mund të shkruani një ekuacion për zgjidhjen e problemit? Shkruani ekuacionin.

B Vrojtoni dhe mësoni

Si duhet të veprojmë për të zgjidhur një problemë?

1. Lexojmë me kujdes problemën. Shkruajmë shkurt të dhënat dhe kërkesën.
2. Madhësinë e panjohur e shënojmë me një shkronjë (ndryshore).
3. Madhësitë e tjera, të panjohura në problemë, i shprehim nëpërmjet ndryshores (ndërtojmë për to shprehje me ndryshoren).
4. Barazojmë dy shprehjet që japin të njëjtën madhësi, duke formuar një ekuacion me një ndryshore.
5. Zgjidhim këtë ekuacion.
6. Kontrollojmë nëse zgjidhja e ekuacionit është e pranueshme për problemën.
7. Japim përgjigjen e problemës.

Shembulli 1

Dy depozita kanë përkatësisht 17 litra dhe 43 litra ujë. Në to do të hidhen, duke zbrazur një depozitë të tretë, 170 litra ujë. Si duhet ndarë kjo sasi uji në dy depozitat e para, në mënyrë që sasia e ujit në to të bëhet e barabartë?

Zgjidhje

1. Kërkohet të ndahen 170 litra ujë midis dy depozitave, që kanë njëra 17 litra dhe tjetra 43 litra, në mënyrë që ato të kenë të njëjtën sasi uji.
2. Shënojmë me x sasinë e litrave që do të hedhim në depozitën e parë, atë me 17 litra.
3. Sasia e ujit që do të hidhet në depozitën e dytë është $(170 - x)$.
4. Sasia e ujit në depozitën e parë, pas hedhjes, bëhet $17 + x$.
5. Sasia e ujit në depozitën e dytë, pas hedhjes, bëhet $43 + (170 - x)$. Këto sasi janë të barabarta, pra $17 + x = 43 + (170 - x)$.
6. Zgjidhim ekuacionin $17 + x = 43 + (170 - x)$.
Kemi $x + x = 43 + 170 - 17$, d.m.th. $2x = 196$, pra $x = 98$.
7. Zgjidhja e ekuacionit është numër pozitiv më i vogël se 170; prandaj pranohet.
8. Në depozitën e parë duhen hedhur 98 litra, në të dytën duhen hedhur $170 - 98 = 72$ litra.
9. Kontrolli i zgjidhjes:
Në depozitën e parë bëhen $17 + 98 = 115$ litra. Në të dytën bëhen $43 + 72 = 115$ litra.

Shembulli 2

Shuma e dy numrave natyrorë të njëpasnjëshëm është 126. Cilët janë këta numra?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin më të vogël; numri tjetër do të jetë $x + 1$.

Sipas kushtit, shuma e tyre është 126. Pra: $x + (x + 1) = 126$.

Zgjidhim këtë ekuacion.

Kemi $2x + 1 = 126$, d.m.th. $2x = 126 - 1$, pra $2x = 125$, d.m.th. $x = 112,5$.

Kjo vlerë e x është e papranueshme për problemën, pasi x duhet të jetë numër natyror.

Problema nuk ka zgjidhje.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Dy numra të plotë të njëpasnjëshëm e kanë shumën 31. Cilët janë numrat?
2. Njëra brinjë e drejtkëndëshit është 4 cm më e madhe se tjetra. Perimetri i drejtkëndëshit është 28 cm. Gjeni gjatësinë e brinjëve të drejtkëndëshit.
3. Mira ka 47 fotografi në një album dhe 35 në një album tjetër. Sa fotografi duhet të kalojë ajo nga albumi i parë në të dytin, në mënyrë që ata të kenë të njëjtin numër fotografish? Si ndryshon përgjigjja, në rastin kur numrat e fotografive në albume janë përkatësisht 40 dhe 27?

USHTRIME

- 1 Gjatësia e segmentit $[AB]$ është 2 cm më e madhe se gjatësia e segmentit $[CD]$. Nëse gjatësinë e $[AB]$ e rritim me 2 cm dhe gjatësinë e $[CD]$ e zvogëlojmë 3 herë, do të marrim gjatësi të barabarta. Gjeni gjatësinë e segmentit $[AB]$.
- 2 Autobusi e përshkoi largesën midis dy qyteteve për 1,8 orë, kurse makina për 0,8 orë. Gjeni shpejtësinë e autobusit, duke ditur që ajo është 50 km/orë më e vogël se e makinës.
- 3 Në një kamion ngarkuan 0,6 ton grurë më tepër se në një tjetër. Nëse në kamionin e parë do të ngarkonin 1,2 herë më shumë, kurse në të dytin 1,4 herë më shumë, sasi të ngarkuara në dy kamionët do të ishin të barabarta. Sa tonë grurë u ngarkuan në secilin kamion?
- 4 Në një fshat turistik, $\frac{5}{9}$ e turistëve u strehuan në hotel; $\frac{1}{6}$ në vila, kurse 75 turistët që mbetën u strehuan në çadra. Sa turistë ishin gjithsej?
- 5 Në bibliotekën e shkollës ka libra artistikë, mësimorë dhe studimorë. Librat artistikë përbëjnë $\frac{3}{4}$ e gjithë sasisë së librave të bibliotekës. Librat mësimorë përbëjnë $\frac{3}{10}$ e librave artistikë, kurse pjesa e mbetur është 160 libra, të cilët janë studimorë. Sa libra ka në bibliotekë?
- 6 Tri fabrika morën porosi për përgatitjen e një malli. Fabrika e parë bëri 0,56 të porosisë, e dyta bëri $\frac{5}{14}$ e pjesës që bëri e para, kurse e treta bëri pjesën e mbetur prej 240 copë të këtij malli. Sa copë ishte porosia?
- 7 Për të prodhuar 228 detale u caktuan dy punëtorë, nga të cilët njëri bën 15 detale në orë, kurse tjetri bën 12 detale në orë. Pagesa u bë për 17 orë pune. Sa orë pune bëri secili punëtor?

9.8 Inekuacione me një ndryshore

A Kërkoni dhe zbuloni

Kur shkoi në qendrën tregtare, Era kishte 20 euro. Ajo bleu 2 kg portokaj me çmim 1,5 euro, 3 kg mollë me çmim 1,2 euro. Bananet kushtonin 0,6 euro copa.

Gjeni numrin më të madh të bananeve që mund të blejë Era. A mund të shkruani një inekuacion për të zgjidhur ushtrimin?

Diskutoni me shokun/shoqen.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Mosbarazimi me një ndryshore quhet inekuacion, në qoftë se kërkohen vlerat e ndryshores që e vërtetojnë atë (e kthejnë në mosbarazim të vërtetë me të njëjtin kah). Çdo vlerë e tillë e ndryshores quhet zgjidhje e inekuacionit.

Vihet re që inekuacionet $2x > 8$ dhe $x - 2 > 2$ kanë të njëjtën bashkësi zgjidhjesh (ata sillen në trajtën $x > 4$, që tregon se bashkësia e zgjidhjeve të tyre është bashkësia e numrave racionalë më të mëdhenj se 2). Ato janë **inekuacione të njëvlershme (ekuivalente)**.



Mbani mend:

Dy inekuacione, me të njëjtën ndryshore, quhen të njëvlershme nëse kanë të njëjtën bashkësi zgjidhjesh.

Për zgjidhjen e një inekuacioni me një ndryshore, ne përpiqemi ta sjellim atë në ndonjërin nga trajtat ($x > a$; $x \geq a$; $x < a$; $x \leq a$), duke bërë **shndërrime të njëvlershme**.



Mbani mend:

Shndërrime të njëvlershme të inekuacionit me një ndryshore janë këto:

1. shndërrimi identik në njërin nga anët e inekuacionit;
2. kalimi i kufizës nga njëra anë e inekuacionit në anën tjetër, duke i ndërruar shenjën;
3. shumëzimi (pjesëtimi) i të dyja anëve të inekuacionit me të njëjtin numër pozitiv, pa ndërruar kahun;
4. shumëzimi (pjesëtimi) i të dyja anëve të inekuacionit me të njëjtin numër negativ, duke ndërruar kahun.

Sikurse për ekuacionet, për të zgjidhur një inekuacion me një ndryshore, ndjekim hapat e mëposhtëm.

1. Shumëzojmë të dyja anët me SHVP e emëruesve (nëse ka thyesa).
2. Kryejmë shndërrimet identike në secilën anë.
3. Kalojmë në anën e majtë kufizat që përmbajnë ndryshoren dhe në anën e djathtë kufizat e tjera.
4. Kryejmë shndërrime identike në secilën anë.
5. Kur arrijmë në një inekuacion të trajtës $ax > b$, $ax \geq b$; $ax < b$; $ax \leq b$, ku $a \neq 0$, kryejmë pjesëtimin me a , duke ndërruar kahun kur $a < 0$ dhe pa e ndërruar kahun kur $a > 0$.

Shembull

Zgjidhni inekuacionin $\frac{x}{6} - \frac{x}{2} < \frac{1}{4}$.

Zgjidhje

SHVP e emërueseve të thyesave është 12.

Shkruajmë: $12 \cdot \left(\frac{x}{6} - \frac{x}{2} \right) < 12 \cdot \frac{1}{4}$. Pra $12 \cdot \frac{x}{6} - 12 \cdot \frac{x}{2} < 12 \cdot \frac{1}{4}$,

d.m.th. $2x - 6x < 3$, pra $-4x < 3$, pjesëtojmë me (-4) dhe ndryshojmë kahun e mosbarazimit $\frac{-4x}{-4} > \frac{3}{-4}$, d.m.th. $x > -\frac{3}{4}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit është bashkësia e numrave racionalë më të mëdhenj se $-\frac{3}{4}$. Kjo bashkësi është paraqitur nëpërmjet pikave përgjegjëse të boshtit numerik.

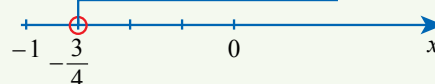


Fig. 9.11

C Ushtroni duke zbatuar

- A është i njëvlershëm inekuacioni $x + x - 4 > 6$ me:
 - $2x - 4 > 6$;
 - $x + x > 6 + 4$;
 - $3x + 3x - 12 > 18$;
 - $-x - x + 4 < -6$?
- Zgjidhni inekuacionet dhe paraqitni bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik.
 - $3(x - 1) < x - 5$;
 - $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} < x$;
 - $5x - 2(4 - x) < 13$;
 - $-x + 4 < -6$.
- Në figurën 9.12 është paraqitur, në boshtin numerik, bashkësia e zgjidhjeve të një inekuacioni. Shkruani një inekuacion të njëvlershëm me të.



Fig. 9.12

- Një libër ka 142 faqe. Agimi lexon 12 faqe në ditë. Pas sa ditësh, atij do t'i mbeten pa lexuar më pak se 60 faqe? Shkruani inekuacionin për të zgjidhur ushtrimin.

USHTRIME

- A janë të njëvlershme inekuacionet?
 - $2x > 6$ dhe $x > 3$;
 - $2x > 6$ dhe $-2x > -6$;
 - $2x > 6$ dhe $2x - 6 > 0$?
- Shkruani 4 inekuacione të njëvlershme me inekuacionin $\frac{x}{3} < 4$.
- Shndërroni inekuacionet e mëposhtme në inekuacione të njëvlershme.
 - $3(1 - 2x) - 4 > 2(x - 5)$;
 - $x(x - 2) + x(5 - x) > x - 1$;
 - $4\left(x - \frac{1}{2}\right) > 2(x - 1)$.
- Zgjidhni inekuacionet dhe paraqitni bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik:
 - $4 - 2x > 16$;
 - $12 < 8 - 3x$;
 - $4(x - 2) > 6 - x$;
 - $8x - 4(3 - x) > 2$.
- Zgjidhni inekuacionet:
 - $\frac{2}{3}x - 2 > \frac{1}{4}$;
 - $\frac{1}{5}x - \frac{7}{4} < \frac{1}{2}$;
 - $\frac{1}{3}x + 5 \leq \frac{1}{2}x + 8$;
 - $\frac{5}{2}x - 1 \geq 2x + 4$.
- Zgjidhni inekuacionet:
 - $8x - 4,8 + 3x > 5,2 + 7x$;
 - $2,3x + 3,4x - 1 > -1 - 2,5x$;
 - $4,3x - 5 + 3,4x > 9 - 2,6x$.

9.9 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar	Provoni të zgjidhni
Zbatimin e radhës së veprimeve aritmetike dhe të kllapave në shprehjet me shkronja.	- Drita, Zana dhe Besa kanë disa fletore. Zana ka 3 fletore më shumë se Drita. Besa ka 2 fletore më shumë se Drita. Nëse Zana ka x fletore, sa fletore ka Drita? Po Besa? - A janë identike shprehjet? $3 + 2x$ dhe $2x + 3$; $4(x - y)$ dhe $4x - 4y$; a^2 dhe $a \cdot a$; $-(x - y)$ dhe $-x - y$. - Shndërroni në shprehje identike: $a \cdot a \cdot a^2$; b) $(xy) \cdot (xy) \cdot (xy)$; c) $(2xy)^3$. - Thjeshtoni shprehjet: $2x - 3x + 5x - 7x + 10x$; b) $2(x - 6) + 5$; $3a - 4b + 6a - 5b + 4$; $1 - x - (5 - x)$; $1,3x - 4,5y + 6,5x - 4,3y$; $2(x - 4) - 3(x + 2)$.
Njehsimin e vlerës së shprehjes shkronjore për vlera të dhëna të shkronjave.	- Gjeni vlerën e shprehjeve: $4x - 2a + 6x - 3a + 4a$, nëse $x = -0,15$ dhe $a = 0,03$; $-6,3y + 8 - 3,2y - 5$, nëse $y = -2$; $-\frac{1}{8}$. - Gjeni vlerën e shprehjes në rrugën më të shkurtër: $xy + xz$ kur $x = 1,67$; $y = 8,9$; $z = 1,1$.
Zgjidhjen e ekuacioneve lineare me një të panjohur (me numra të plotë dhe racionalë).	- Pa i zgjidhur ekuacionet, tregoni nëse janë të njëvlershme: $12 - x = 8$ dhe $12 - x + 4 = 8 + 4$; $x + 6 = 15$ dhe $-4 + x + 6 = 15 - 4$; $3x - 12 = 0$ dhe $6x - 24 = 0$. - Zgjidhni ekuacionin $\frac{x-2}{4} = \frac{2x+1}{3}$, duke e shndërruar në ekuacione të njëvlershme. Argumentoni veprimet. - Për trekëndëshin ABC, shkruani një ekuacion që lidh tri këndet e tij. Gjeni x. - Shkruani një ekuacion për të gjetur vlerën e a.

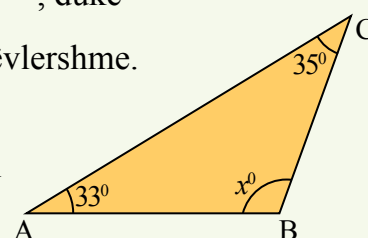


Fig. 9.13

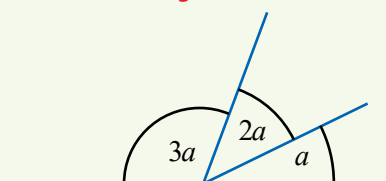


Fig. 9.14

Zgjidhjen e inekuacioneve lineare me një të panjohur (me numra të plotë dhe numra racionalë).

11. Me cilin nga inekuacionet e mëposhtme është i njëvlershëm inekuacioni $3x - 6 < 4x - 8$?

- a) $3x - 4x < -8 + 6$; b) $x - 2 < \frac{4}{3}(x - 2)$;
c) $6 - 3x < 8 - 4x$; d) $3(x - 2) < 4(x - 2)$.

12. Zgjidhni inekuacionin $\frac{2x-1}{3} < 4x - 1$, duke e shndërruar në inekuacione të njëvlershme. Paraqitni bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik.

Paraqitjen e zgjidhjes së inekuacioneve në drejtëzën numerike dhe formimin e bashkësisë numerike të zgjidhjeve.

13. Shkruani inekuacionin që paraqet zgjidhjet grafike të dhëna më poshtë:

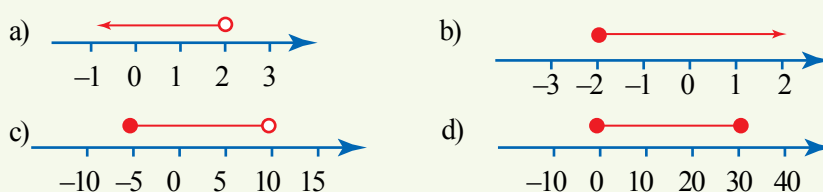


Fig. 9.15

Modelimin dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve me numra të plotë dhe racionalë.

14. Tri familje duhet të vjelin 690 rrënjë ullinj. E dyta mund të vjelë dyfishin e të parës, kurse e treta mund të vjelë 45 rrënjë më shumë se e dyta. Sa rrënjë ullinj do të vjelë secila familje?

15. Një numër natyror njëshifror plotëson kushtin

$$4\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) > \frac{24-x}{3}. \text{ Cili është ky numër?}$$

16. Gjeni vlerat e x dhe të y për secilin nga drejtkëndëshat e paraqitur më poshtë:

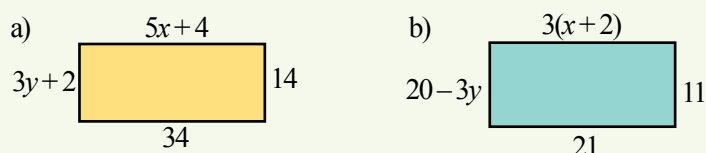


Fig. 9.16

17. Duke ditur se shprehja në secilën kuti është sa shuma e shprehjeve në dy kutitë që ndodhen poshtë saj, gjeni x .

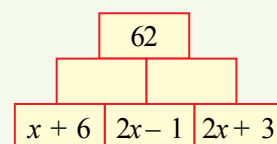


Fig. 9.17

9.10 Vlerësim**Koha: 45 minuta****1** Sillni në trajtë të rregullt monomin:

a) $(3x)^2$;

b) $(-2ab)^3$;

c) $\left(\frac{3}{4}x^2y\right)^2 \cdot 8xy$.

(3 pikë)**2** Reduktoni kufizat e ngjashme:

a) $5x - 4x + 7x - 3x + 6x$;

b) $2x^2 - 4x + 5 + 5x - 7x^2 - 4$.

(2 pikë)**3** Thjeshtoni shprehjet:

a) $2(3 - x) + 5x$;

b) $3(x - 4) - 5(1 - x)$;

c) $x(x - 2) + 2(4 - x)$.

(3 pikë)**4** Gjeni në rrugën më të shkurtër vlerën e shprehjeve:

a) $7,8x + 2,2x$ për $x = 1,84$;

(2 pikë)

b) $ab + ac$ për $a = 5,32$; $b = 3,7$; $c = 1,3$.

(2 pikë)**5** Zgjidhni ekuacionin $3(x - 1) - 5 = 2(x - 4)$, duke bërë shndërrime të njëvlershme.**(3 pikë)****6** Zgjidhni ekuacionet:

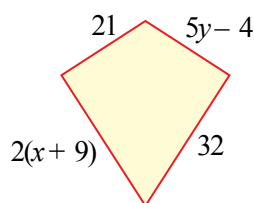
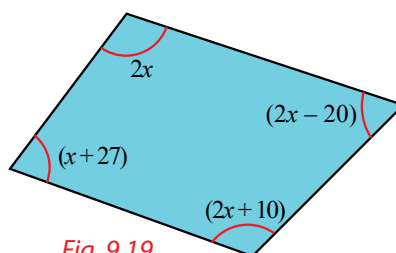
a) $2(x - 3) + 5 = 4x$;

b) $\frac{x-2}{4} = \frac{2-x}{3}$.

(4 pikë)**7** Zgjidhni inekuacionet:

a) $2x - 4 < 4x$;

b) $3(x - 1) \geq 5(x - 2) - 4$.

(3 pikë)**8** Një drejtkëndësh e ka gjatësinë 5 m. Sa është gjerësia e tij, nëse syprina është 16 m^2 ?**(3 pikë)****9** Disa alpinistë, ditën e parë përshkuan $\frac{5}{18}$ e rrugës, ditën e dytë përshkuan $\frac{4}{9}$ e rrugës dhe ditën e tretë përshkuan 20 km e fundit. Sa rrugë bënë ata për këto tri ditë?**(3 pikë)****10** Një lulishte në formën e deltoidit do të rrethohet me tel. Gjeni sa metra tel duhen, nëse lulishtja do të rrethohet me katër rreshta?**(2 pikë)***Fig. 9.18***11** Shkruani një ekuacion për të gjetur x . Gjeni masën e secilit prej këndeve të katërkëndëshit.**(3 pikë)***Fig. 9.19*

10

Shndërrime gjeometrike dhe trupa gjeometrikë

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- konstrukton figurat me drejtëz simetrie dhe me qendër simetrie;
- identifikon figurat dydimensionale në rrjetin e prizmit dhe të piramidës;
- zbulon formulat për njehsimin e sipërfaqes së prizmit dhe të piramidës, duke shfrytëzuar rrjetat (hapjet) përkatëse;
- përshkruan marrëdhëniet ndërmjet njësive kubike dhe i përdor saktë ato gjatë matjeve;
- skicon objektet tredimensionale nga modelet dhe vizatimet;
- zbulon formulat për njehsimin e vëllimit të prizmit dhe të piramidës të rregullt;
- hulumton dhe raporton për zgjidhjen e problemeve të ndryshme në shtëpi dhe komunitet, që kanë të bëjnë me trupat gjeometrikë (prizmi, piramida).



Fjalë kyçe:

simetri, simetri boshtore, simetri qendrore, fytyrë, shëmbëllim, figura me bosht simetrie, figura me qendër simetrie, shumëfaqësh, shumëfaqësja të mysët, shumëfaqësja të rregullt, kub, kuboid, prizëm, piramidë, sipërfaqe, vëllim.

A E DINI SE...?



Simetria nënkupton që pjesët e një objekti, subjekti, gjallesë kanë një ekuilibër rreth boshtit qendror ose pikës. Një flutur, një gjethe, makinat, njerëzit janë organizma e objekte që gëzojnë simetri. Po çfarë mund të themi për një pemë apo një vullkan? A janë simetrikë? Në pamje të parë, një bredh mund të duket si simetrik, kurse një lis i vjetër duket se nuk ka kurrfarë rregullsie. E, megjithatë, edhe ato janë simetrike, ashtu sikurse molekulat dhe orbitat planetare. Nëse një objekt rrotullohet apo

pasqyrohet, ai është simetrik, nëse ngjan saktësisht ashtu si dukej më parë. Për shembull, po të pasqyrohet vertikalisht në mes, germa A mbetet sërish A.

Kemi një anë të majtë dhe një anë të djathtë - pasqyrojeni një qenie njerëzore përgjatë boshtit të vet qendror, dhe përgjithësisht do të duket pikërisht ashtu siç dukej më parë. Edhe germa H ka dy boshte simetrie: vertikal dhe horizontal. Po germa Z? Edhe ajo është simetrike, por simetrike me një pikë që gjendet në të.



10.1 Përsëritje. Sistemi kënddrejtë koordinativ. Koordinatat e pikës

A Kërkoni dhe zbuloni

Përcaktoni koordinatat e objekteve.

Shënoni objektet që ndodhen në secilin kuadrant.

Vrojtuni koordinatat e tyre. Çfarë vini re?

Vendosni vetë pika në kuadrante të ndryshme.

Gjeni koordinatat e tyre.

Vrojtuni koordinatat e objekteve që ndodhen mbi boshtet koordinative. Vendosni vetë pika të tjera në boshtet koordinative. Gjeni koordinatat e tyre.

Bashkëbisedoni.

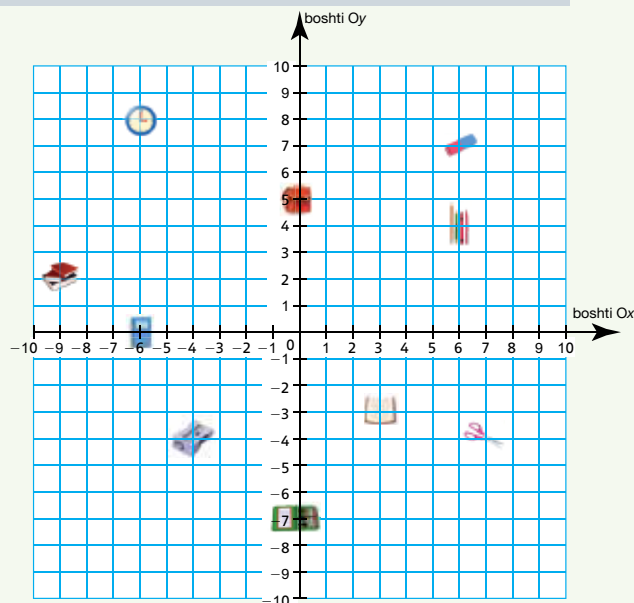


Fig. 10.1

B Vrojtuni dhe mësoni



Mbani mend:

Rrafshin në të cilin është dhënë një sistem kënddrejtë koordinativ e quajmë **rrafsh koordinativ**. Boshtet e ndajnë rrafshin koordinativ në katër pjesë, që quhen **kuadrante**.

Le të kemi në të një pikë A (fig. 10.2/a).

Tërheqim prej saj pingulen me boshtin $x'Ox$; kjo e pret boshtin në pikën me koordinatë 3 (fig. 10.2/b). Numri 3 quhet **abshisë** e pikës A.

Tërheqim tani nga pika A pingulen me boshtin $y'Oy$; ajo e pret boshtin në pikën me koordinatë 2 (fig. 10.2/c). Numrin 2 e quajmë **ordinatë** të pikës A.

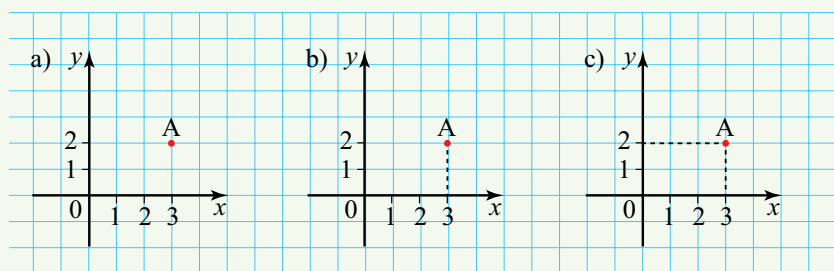


Fig. 10.2

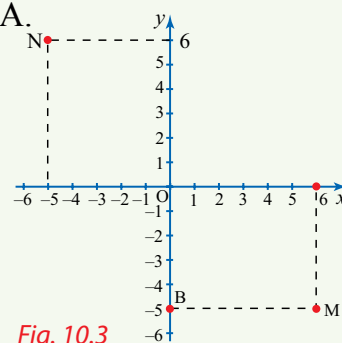


Fig. 10.3

Numrat $x = 3$ dhe $y = 2$ përcaktojnë pozicionin e pikës A në rrafshin koordinativ.

Ato i quajmë **koordinata** të pikës A. Për pikën A, me abshisë 3 dhe ordinatë 2 përdoret shënimi A (3; 2). Gjithmonë, në vendin e parë shkruajmë abshisën e pikës, kurse në vendin e dytë ordinatën. Po të ndërrojmë vendet e koordinatave, merret tjetër pikë. Në figurën 10.3 janë paraqitur pikat M (6; -5) dhe N (-5; 6).

Si përcaktohet pozicioni i pikës në rrafshin koordinativ, kur njihen koordinatat e saj? Në figurën 10.4 ilustron si mund të gjejmë pikën M (3, -4). Për këtë:

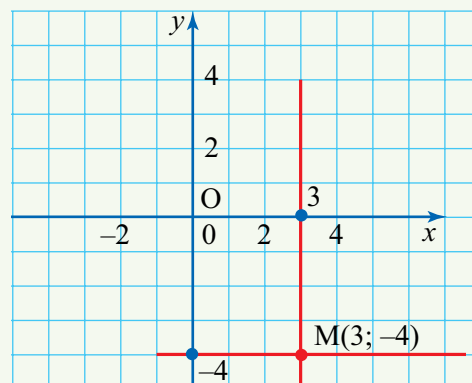


Fig. 10.4

- Në pikën e boshtit të abshisave me koordinatë 3 heqim pingulen me këtë bosht.
- Në pikën e boshtit të ordinatave me koordinatë (-4) heqim pingulen me këtë bosht.
- Pika ku priten këto pingule është pika e kërkuar M.

**Mbani mend:**

- Të gjitha pikat e boshtit të abshisave e kanë ordinatën zero.
- Të gjitha pikat me ordinatë 0 ndodhen në boshtin $x'Ox$.
- Themë që pikat e boshtit të abshisave (dhe vetëm ato) vërtetojnë ekuacionin $y = 0$.
- Të gjitha pikat e rrafshit sipër boshtit të abshisave i kanë ordinatat pozitive.
- Të gjitha pikat e rrafshit poshtë boshtit të abshisave i kanë ordinatat negative.
- Themë që pikat e rrafshit që ndodhen sipër boshtit të abshisave (dhe vetëm ato) vërtetojnë inekuacionin $y > 0$.
- Të gjitha pikat e boshtit të ordinatave (dhe vetëm ato) e kanë abshisën zero.
- Themë që pikat e boshtit të ordinatave (dhe vetëm ato) vërtetojnë ekuacionin $x = 0$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Në fletoren me katrorë vizatoni një sistem kënddrejtë koordinativ (njësia e gjatësisë sa gjatësia e brinjës së katrorit) dhe ndërtoni pikat A $(-2; -1)$ dhe B $(-1; 2)$.
2. Si janë vendosur në lidhje me boshtet koordinative pikat e planit që plotësojnë kushtin $x < 0$ dhe $y < 0$?
3. Mirëmbajtësit e rrugës vendosën që disa pika të saj të riparohen. Përcaktoni vendndodhjen e përafërt të këtyre pikave.

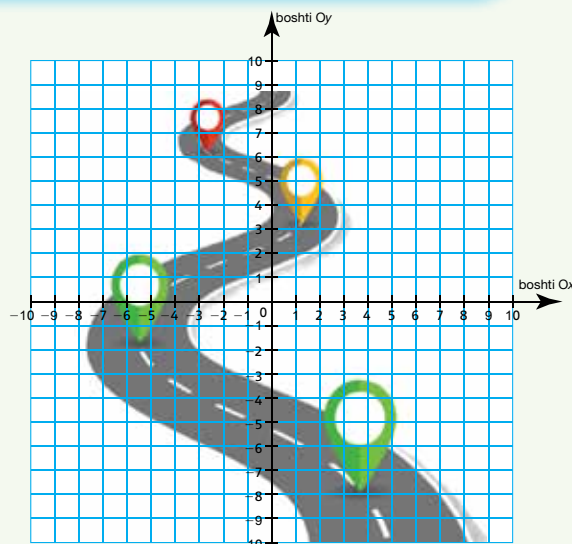


Fig. 10.5

USHTRIME

- 1 Në një fletë me kuti ndërtoni një rrafsh koordinativ. Shënoni në të secilën nga pikat: A $(5; 7)$; B $(3; 8)$; C $(10; 4)$; D $(9; 1)$; E $(0; 8)$; F $(5; 0)$.
- 2 a) Ku ndodhen pikat me koordinatën e parë 0?
b) Ku ndodhen pikat me koordinatën e dytë 0?
- 3 A janë të njëjta pikat me koordinata $(7; 3)$ dhe $(3; 7)$? Argumentoni.
- 4 a) Shënoni pikat $(3; 3)$ dhe $(3; 6)$ në rrafshin koordinativ. Bashkujini ato me një segment.
b) Përshkruani pozicionin e dy pikave të tjera të këtij segmenti nëpërmjet koordinatave.
- 5 a) Shënoni pikat me koordinata $(8; 6)$; $(7; 5)$; $(6; 4)$; $(5; 3)$ në rrafshin koordinativ.
b) Ç'rregullsi vini re midis numrave që janë koordinata?
c) Ç'rregullsi vini re në pikat përkatëse në rrafshin koordinativ?
d) Vazhdoni më tej vargun e pikave, duke parashikuar koordinatat e tyre.
- 6 a) Ndërtoni në rrafshin koordinativ katërkëndëshin ABCD me kulme: A $(-10; -2)$, B $(-2; -2)$, C $(-2; -6)$, D $(-10; -6)$.
b) Çfarë lloj katërkëndëshi është? c) Gjeni perimetrin dhe syprinën e tij.

10.2 Simetria sipas një drejtëze (simetria boshtore)

A Kërkoni dhe zbuloni

A janë simetrike figurat A dhe B në lidhje me boshtin e ordinatave? Diskutoni.

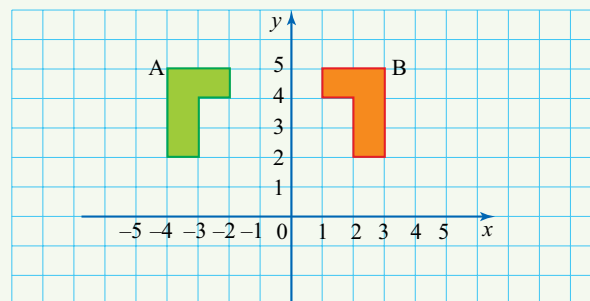


Fig. 10.6

B Vrojtoni dhe mësoni

Në figurën 10.7 është dhënë një pikë A dhe një drejtëz d . Nga pika A konstruktojmë pingulën mbi drejtëzën d . Kjo pingule e pret drejtëzën d në pikën M. Në zgjatim të $[AM]$ marrim segmentin $[MA_1]$, kongruent me $[AM]$. Pika A_1 quhet pikë simetrike e pikës A në lidhje me drejtëzën d . Pika A quhet **fytyrë**, kurse pika A_1 quhet **shëmbëllim**.

Nëse do të ndërtonim simetrikën e pikës A_1 në lidhje me drejtëzën d , do të merrnim pikërisht pikën A. Për këtë arsye, pikat A dhe A_1 quhen **simetrike** të njëra-tjetres kundrejt drejtëzës d . Drejtëza d quhet **bosht simetrie**.

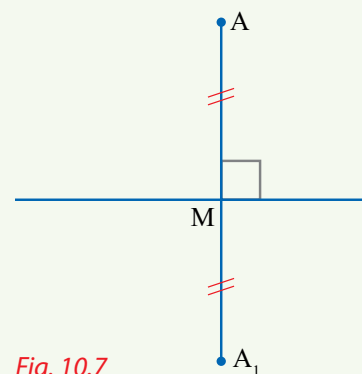


Fig. 10.7



Mbani mend:

Nëse pika A përshkon një figurë F, atëherë simetrikja e saj A_1 do të përshkojë një figurë F_1 , që quhet simetrike e figurës F në lidhje me drejtëzën d .

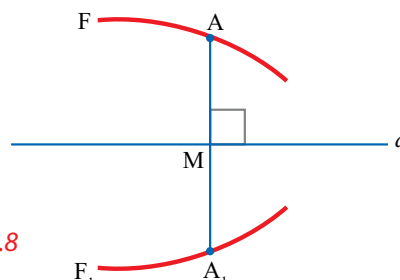


Fig. 10.8

Shembull

Konstruktoni figurën simetrike të një segmenti $[AB]$ në lidhje me një drejtëz d .

Zgjidhje

Konstruktojmë simetriket e pikave A, B në lidhje me drejtëzën d . Këto janë përkatësisht pikat A_1 , B_1 .

Figura simetrike e segmentit $[AB]$ në lidhje me drejtëzën d është segmenti $[A_1B_1]$.

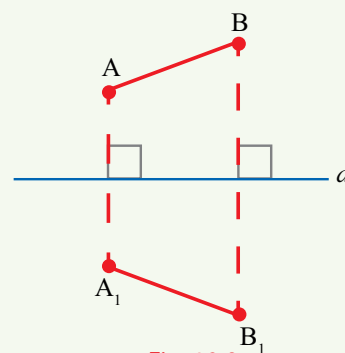


Fig. 10.9



Kujdes!

Për të ndërtuar simetrikën e një drejtëze a në lidhje me drejtëzën d , mjafton të marrim dy pika të drejtëzës a dhe të gjejmë simetriket e tyre në lidhje me drejtëzën d .

Simetria boshtore në rrafshin koordinativ

Në figurën 10.10 është paraqitur pika $M(x; y)$. Simetrikja e saj në lidhje me boshtin $x'Ox$ është pika $M_1(x; -y)$, që ka të njëjtën abshisë, por ordinatë të kundërt.

Simetrikja e pikës M në lidhje me boshtin $y'Oy$ është pika $M_2(-x; y)$, që ka të njëjtën ordinatë, por abshisë të kundërt.

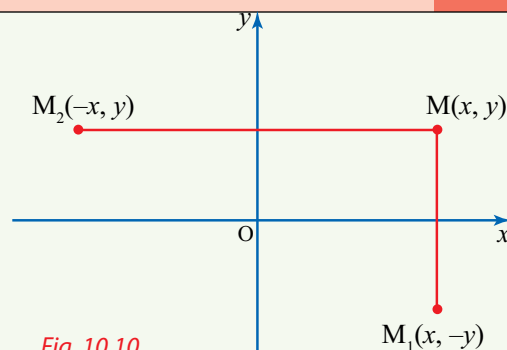


Fig. 10.10

**Mbani mend:**

Dy figura, që janë simetrike në lidhje me një drejtëz, janë kongruente.

Në rrafshin koordinativ mund të ndërtohen figurat simetrike të një figure të dhënë në lidhje me një drejtëz çfarëdo, pra jo vetëm në lidhje me boshtin e abshisave dhe të ordinatave.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Jepen pikat $A(2; 3)$ dhe $B(-1; 4)$.

- Gjeni pikat simetrike të A, B në lidhje me boshtin Ox . Cila është figura simetrike e $[AB]$ në lidhje me boshtin Ox ?
- Gjeni figurën simetrike të segmentit $[AB]$ në lidhje me boshtin Oy dhe krahasojeni atë me segmentin $[AB]$.



2. Tregoni në trupin tuaj pika që janë simetrike ndaj boshtit vertikal të trupit.

USHTRIME

1 Konstruktoni simetriket e figurave, në lidhje me drejtëzën e dhënë d .

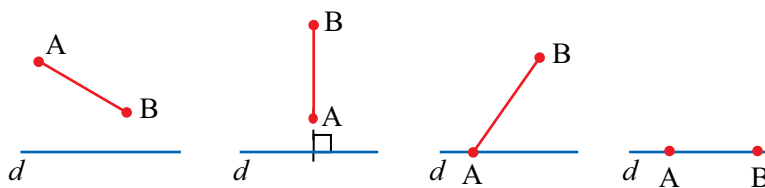


Fig. 10.11

2 Konstruktoni simetriket e figurave, në lidhje me drejtëzën e dhënë d .

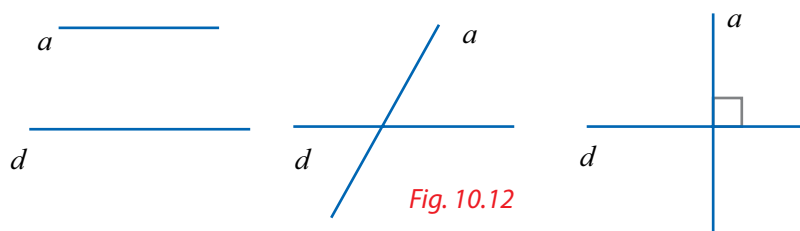


Fig. 10.12

3 Konstruktoni simetriket e figurave, në lidhje me drejtëzën e dhënë d .

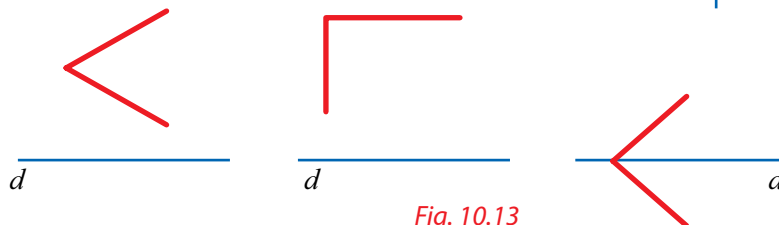


Fig. 10.13

4 Konstruktoni simetriket e figurave, në lidhje me drejtëzën e dhënë d .

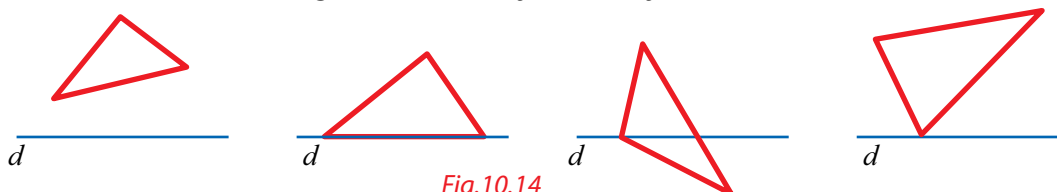


Fig. 10.14

10.3 Drejtëzat (boshtet) e simetrisë së figurave

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurat e dhëna gjeni boshtet e simetrisë. Sa boshte simetrie ka secila prej tyre?

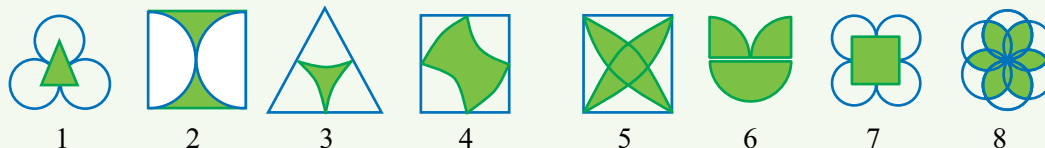


Fig. 10.15

B Vrojtoni dhe mësoni

Figura 10.16 ka një drejtëz simetrie, e cila është paraqitur me vija të ndërprera.

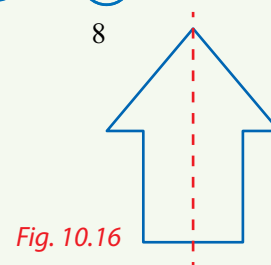


Fig. 10.16



Mbani mend:

Drejtëza e simetrisë quhet nganjëherë edhe drejtëza e pasqyrimit, sepse po të vendosni një pasqyrë në vendin ku është vendosur drejtëza, do të merrni të njëjtën figurë. Nëse palosni një figurë sipas drejtëzës së simetrisë, do të vini re se dy gjysmat e figurës përputhen.

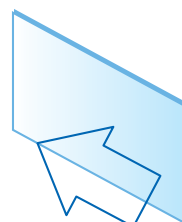


Fig. 10.17



Fig. 10.18



Punë në grup

Figura 10.19 nuk ka bosht simetrie. Argumentoni pse. Tregoni figura të tjera që nuk kanë bosht simetrie.



Fig. 10.19

Më poshtë janë dhënë figura me dhe pa bosht simetrie.

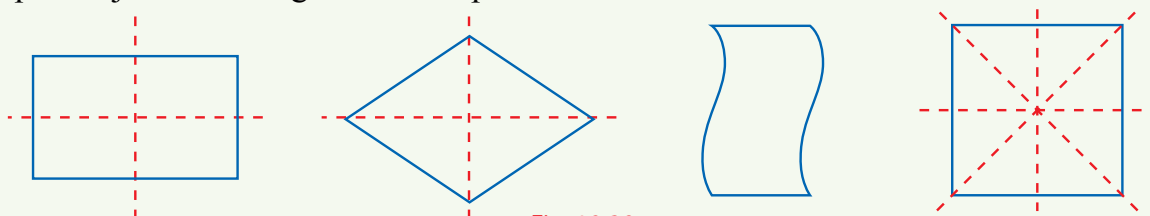


Fig. 10.20

Trekëndëshi barakrahës ka një drejtëz simetrie, e cila është pingul me brinjën përballë dhe kalon nëpër mesin e bazës. Ajo është simetralja e bazës.

Trekëndëshi barabrinjës ka 3 drejtëza simetrie. Secila prej tyre bie pingul me brinjën përballë kulmit nga del dhe përmban mesin e kësaj brinje. Këto drejtëza simetrie janë simetralet e brinjëve.

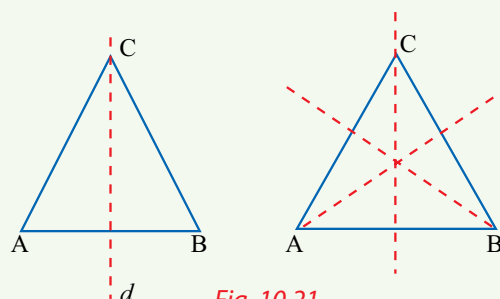


Fig. 10.21

Shembull

Gjeni këndet e bazës së trekëndëshit barakrahës, nëse këndi $m(\angle ACM) = 20^\circ$.

Zgjidhje

Meqë [CM] është drejtëz simetrie për trekëndëshin, ajo e ndan në dy pjesë të barabarta edhe këndin $\angle ACB$. Pra, masa e këndit $\angle ACB = 40^\circ$. Kështu dy këndet e tjera do të ndajnë ndërmjet tyre $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. $140^\circ : 2 = 70^\circ$ është secili nga këndet e bazës së trekëndëshit.

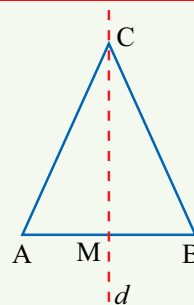


Fig. 10.22

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Kopjoni këto figura dhe vizatoni për secilën drejtëzën e simetrisë, nëse ekziston.

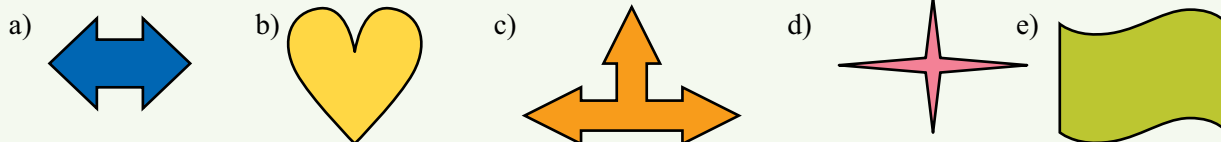


Fig. 10.23

2. Konstruktioni 5-këndëshin e rregullt me brinjë 5 cm. Gjeni boshtet e simetrisë.

3. Konstruktioni 6-këndëshin e rregullt me brinjë 4 cm. Gjeni boshtet e simetrisë.

4. Një trekëndësh barakrahës e ka këndin në njërën kulm 60° . Sa drejtëza simetrie ka ai?

5. Shkronja M është një nga shkronjat e alfabetit që ka bosht simetrie. Gjeni shkronja të tjera të alfabetit që kanë bosht simetrie.

USHTRIME

1 Për secilën figurë, tregoni numrin e drejtëzave të simetrisë, duke plotësuar një tabelë.

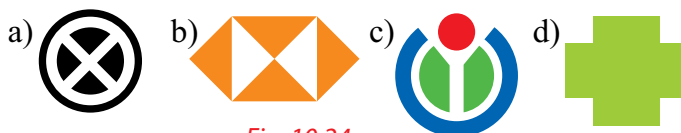


Fig. 10.24

2 Një trekëndësh barakrahës e ka shumën e këndeve të bazës 120° . Sa boshte simetrie ka ai?

3 Vizatoni simetrikën e figurës së formuar nga katrorët e ngjyrosur në lidhje me drejtëzat e treguara të simetrisë.

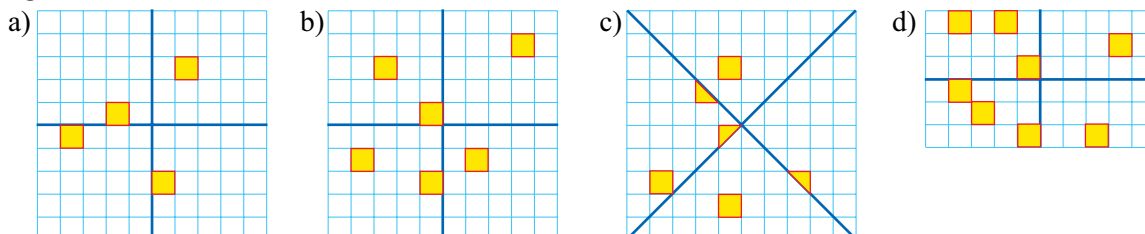


Fig. 10.25

4 Kopjoni diagramet e figurës 10.26. Vizatoni shëmbëllimin e secilës figurë sipas drejtëzave Ox dhe Oy.

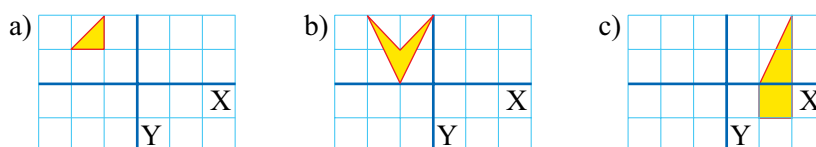


Fig. 10.26

5 Cili katërkëndësh ndahet me anë të drejtëzës së simetrisë në dy trekëndësha që janë:

a) barakrahës?

b) kënddrejtë barakrahës?

c) brinjëndryshëm?

Skiconi figurat dhe argumentoni.

10.4 Simetria qendrore

A Kërkoni dhe zbuloni

Është dhënë paralelogrami ABCD, ku O është pika e prerjes së diagonaleve. Ç'mund të thoni për treshen e pikave A, O, C? Po për treshen e pikave B, O, D? Diskutoni.

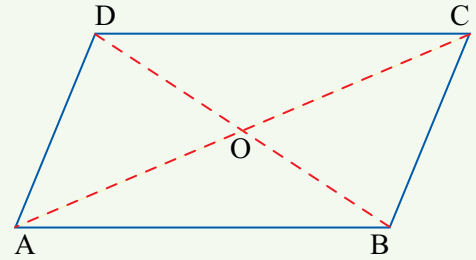


Fig. 10.27

B Vrojtoni dhe mësoni

Le të kemi në rrafsh një pikë O. Marrim një pikë të çfarëdoshme M dhe tërheqim gjysmëdrejtëzën [OM). Në gjysmëdrejtëzën plotësuese të gjysmëdrejtëzës [OM) marrim një pikë M_1 , të tillë që $[OM_1] = [OM]$.

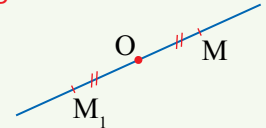


Fig. 10.28

Themi se pika M_1 është pikë simetrike e pikës M në lidhje me pikën O. Nëse do të ndërtojmë sipas mënyrës së treguar pikën simetrike të pikës M_1 në lidhje me O, do të marrim pikërisht pikën M. Prandaj pikat M, M_1 quhen pika simetrike të njëra-tjetrës në lidhje me O. Pika O quhet **qendra e simetrisë**. Ajo është mesi i segmentit $[MM_1]$.



Mbani mend:

Dy pika janë simetrike në lidhje me pikën O nëse O është mesi i segmentit me skaje në këto pika.

Nëse pika M përshkon një figurë F, atëherë pika M_1 do të përshkojë një figurë F_1 . Figura F_1 quhet figura simetrike e F në lidhje me O. Ajo është kongruente me figurën F.

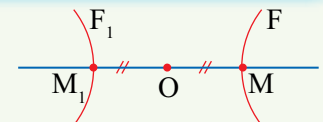


Fig. 10.29

Në klasat më të larta do të shihni që, në simetrinë me qendër të dhënë, figura simetrike e një drejtëze është një drejtëz; figura simetrike e një rrethi është një rreth me të njëjtën rreze; figura simetrike e segmentit është segment etj.

Shembull

Jepet në rrafsh pika O dhe dy pika A, B. Konstruktoni figurën simetrike të segmentit $[AB]$ në lidhje me O.

Zgjidhje

Konstruktojmë simetrikën e pikës A në lidhje me O (pika A_1).
Konstruktojmë simetrikën e pikës B në lidhje me O (pika B_1).
Figura simetrike e segmentit $[AB]$ është segmenti $[A_1B_1]$.

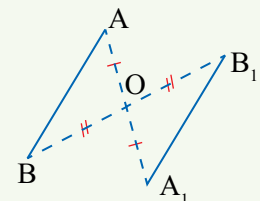


Fig. 10.30



Punë në grup

Në rrafshin koordinativ merrni pikën A (1; 2) dhe ndërtoni pikën simetrike të saj në lidhje me origjinën e koordinatave O.
Ndërtoni pikën simetrike të B (−2; 3) në lidhje me O.
Çfarë vini re?

**Mbani mend:**

Në rrafshin koordinativ, simetrikja e pikës $M(x; y)$ në lidhje me origjinën O është pika $M_1(-x; -y)$, që ka koordinata të kundërta me M .

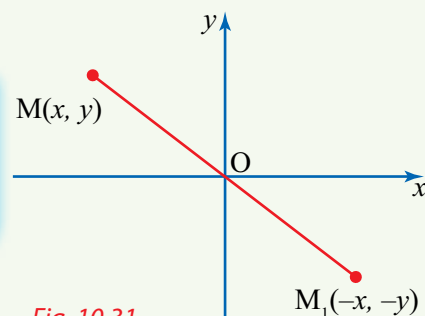


Fig. 10.31

C Ushtroni duke zbatuar

- Në rrafshin koordinativ ndërtoni pikat $A(2; 1)$ dhe $B(-2; 4)$.
 - Gjeni koordinatat e pikave simetrike të tyre në lidhje me origjinën e koordinatave.
 - Cila është figura simetrike e segmentit $[AB]$?
- Konstruktoni figurën simetrike të figurës së dhënë, në lidhje me pikën e dhënë O .

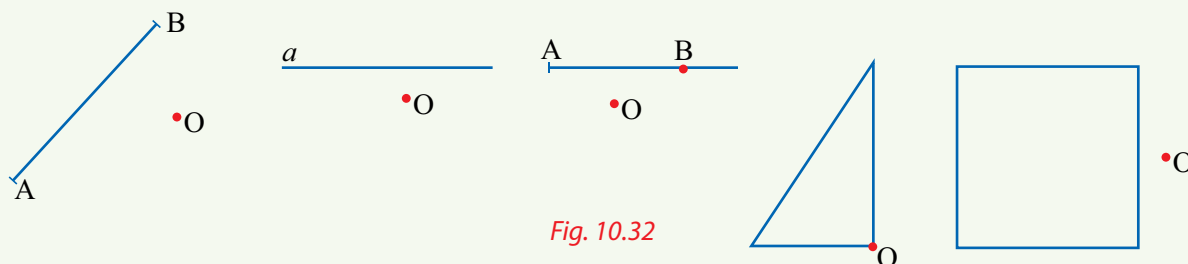


Fig. 10.32



- Shkronja S është shkronjë me qendër simetrie. Gjeni shkronja të tjera të alfabetit që kanë qendër simetrie.
Gjeni shkronja që kanë qendër dhe bosht simetrie.

USHTRIME

- Konstruktoni figurën simetrike të figurës së dhënë, në lidhje me pikën e dhënë O .

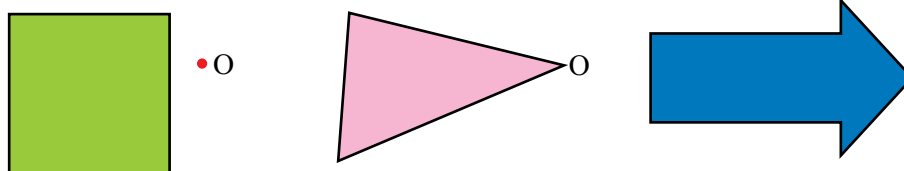


Fig. 10.33

- Cila është figura simetrike e:
 - një katrori, në lidhje me pikën ku priten diagonalet?
 - një rrethi, në lidhje me qendrën e tij?
- Në rrafshin koordinativ ndërtoni pikat $A(2; 2)$, $B(3; 3)$, $C(0; 4)$. Konstruktoni figurën simetrike të trekëndëshit ABC në lidhje me origjinën e koordinatave.
- Ndërtoni pikën simetrike të pikës $A(1; 2)$ në lidhje me pikat: a) $B(2; 0)$; b) $C(1; 3)$.
- Ndërtoni figurën simetrike, në lidhje me origjinën e koordinatave, për drejtëzën:
 - $x = 2$;
 - $y = 3$.
- Merrni në rrafsh dy pika A, B . Gjeni qendrën e simetrisë (pikën në lidhje me të cilën ato janë simetrike).
- Konstruktoni figurën simetrike të figurës së dhënë, në lidhje me pikën e dhënë O .

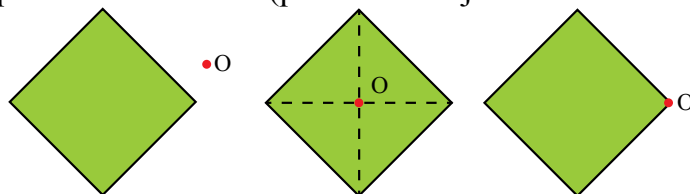


Fig. 10.34

10.5 Shumëfaqëshit. Kubi dhe kuboidi

A Kërkoni dhe zbuloni

Ndër trupat e paraqitur në figurë, dalloni ata që kufizohen nga shumëkëndësja. Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Shumëfaqësh quhet trupi i kufizuar nga shumëkëndësja.

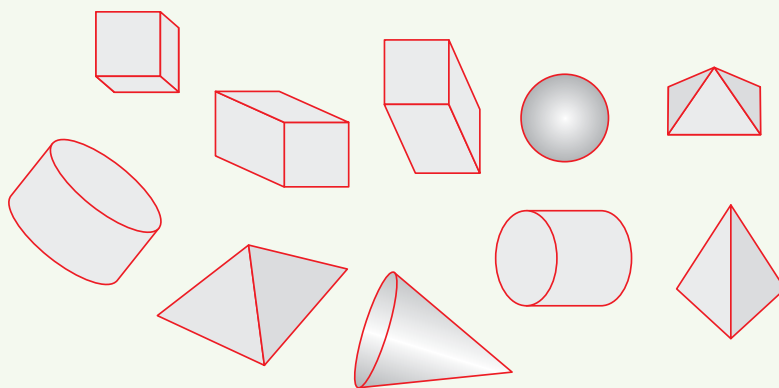


Fig. 10.35

Shumëkëndëshat që kufizojnë shumëfaqëshin quhen faqe të shumëfaqëshit. Të tillë janë, për shembull, trekëndëshat SCA, ABC (në fig. 10.36/a) apo katërkëndëshat EFKL, FKPN në figurën 10.36/b. Dy faqe priten sipas një **brinje**. Të tillë janë, për shembull, [SA]; [AB] etj. (në fig. 10.36/a). Kulmet e faqeve quhen kulme të shumëfaqëshit, për shembull A; B; C; S në figurën 10.36/a.

Shumëfaqëshi quhet konveks, nëse është i vendosur në të njëjtën anë të rrafshit të secilës faqe të tij. Për shembull, kubi dhe kuboidi janë konveksë.

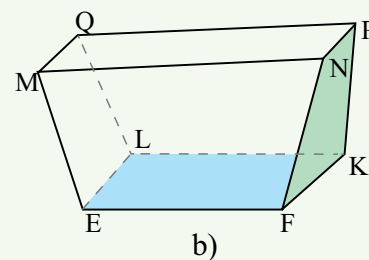
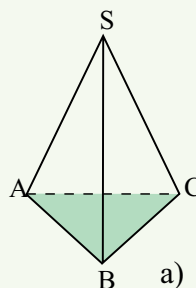


Fig. 10.36



Punë në grup

Ndërtoni një kub. Tregoni numrin e kulmeve, të brinjëve dhe të faqeve të tij.

Tregoni mënyrën e ndërtimit të kubit. Tregoni veti të tij.

Imagjinoni sikur kubi në figurën 10.37 është ndërtuar prej kartoni. Nëse presim me gërshërë sipas segmenteve [AD], [DC], [CB], pastaj sipas segmenteve [CG], [GF] dhe [HG], [HE], po të shtrijmë të gjitha faqet (pas prerjes) në një rrafsh, do të marrim **hapjen e kubit** (rrjetin e kubit).

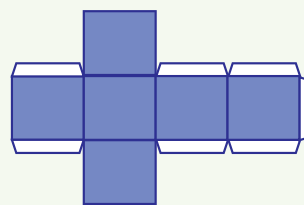
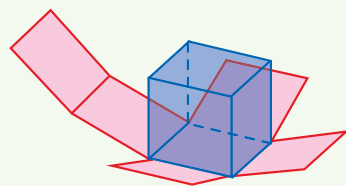
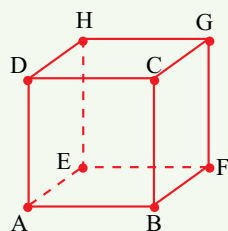


Fig. 10.37

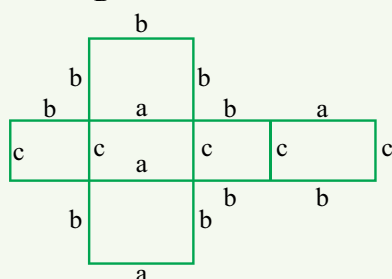
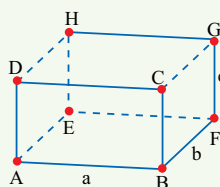


Fig. 10.38



Punë në grup

Ndërtoni një kuboid. Tregoni numrin e kulmeve, të brinjëve dhe të faqeve të tij. Tregoni mënyrën e ndërtimit të kuboidit. Tregoni veti të tij.

**Mbani mend:**

Syprina anësore e kuboidit jepet me formulën $S_a = p \cdot h$, ku p është perimetri i bazës dhe h është lartësia e kuboidit. Syprina e përgjithshme e kuboidit jepet me formulën: $S_p = S_a + 2S_b$, ku S_b është sipërfaqja e njërës bazë të tij. Vëllimi i kuboidit jepet me formulën $V = a \cdot b \cdot c$

Shembull

Gjeni syprinën anësore, të përgjithshme dhe vëllimin e një tulle me gjatësi 25 cm, gjerësi 12 cm dhe lartësi 6 cm.

Zgjidhje

Janë dhënë $a = 25$ cm; $b = 12$ cm dhe $h = 6$ cm.

Kemi:

$$p = 2(a + b) = 2(25 + 12) = 74 \text{ cm. } S_a = p \cdot h = 74 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 444 \text{ cm}^2;$$

$$S_b = a \cdot b = 25 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^2; S_p = S_a + 2S_b = 444 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 300 \text{ cm}^2 = 444 \text{ cm}^2 + 600 \text{ cm}^2 = 1044 \text{ cm}^2.$$

$$V = a \cdot b \cdot c = 25 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 1800 \text{ cm}^3.$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Një kuti në formë kubi e ka brinjën 25 cm. Gjeni sipërfaqen e përgjithshme dhe vëllimin e kutisë.
2. A janë kuboidë të gjithë kubet? A janë kube të gjithë kuboidët? Argumentoni.
3. Një kuboid ka këto përmasa: 8 cm; 5 cm; 10 cm. Sa cm tel duhet për skeletin e tij?

4. Në figurën 10.39/a jepet vizatimi i një shtëpie. Një formë e thjeshtë e kësaj ndërtese mund të vizatohet në letër izometrike si në figurën 10.39/b. Një vizatim izometrik kryhet në një fletë të përbërë nga një rrjetë trekëndëshash barabrinjës (fig. 10.40), në vend të katrorëve. Vizatoni objekte në letrën izometrike.

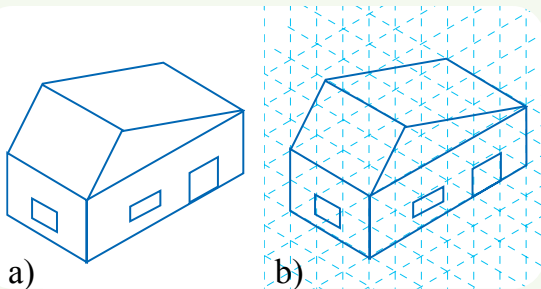


Fig. 10.39

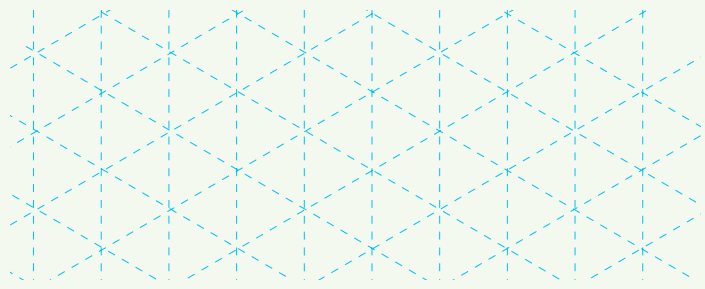


Fig. 10.40

USHTRIME

1. Midis trupave të dhënë në figurën 10.41, tregoni cilët janë kuboidë.
2. Përmasat e një kuboidi janë 3 cm, 4 cm, 5 cm. Sa është syprina e tij?
3. Në figurën 10.42 jepen përmasat e një zari. Konstruktoni hapjen e tij. Një kuti ka përmasa 8 cm, 10 cm dhe 6 cm. Cili është numri më i madh i zareve që nxë kutia?
4. Në figurë jepen përmasat e një depozite. Zana mbushi treçerekun e saj me ujë.
 - a) Sa është vëllimi i ujit në depozitë?
 - b) Sa për qind e depozitës është e mbushur me ujë?

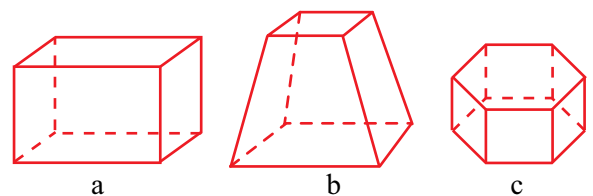


Fig. 10.41

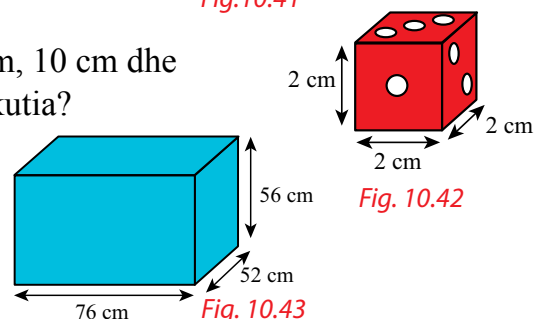


Fig. 10.42

10.6 Prizmi

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 10.44 tregohet çadra e një alpinisti.

- Përshkruajeni duke treguar numrin e faqeve, të brinjëve dhe të kulmeve. Përshkruani faqet e çadrës.
- Dy faqe të saj janë trekëndësha kongruentë. Ç'loj shumëfaqëshi paraqet kjo çadër?



Fig. 10.44

B Vrojtoni dhe mësoni

Në figurën 10.45 janë treguar tre shumëfaqësha. Në secilin shumëfaqësh, dy faqet e ngjyrosura janë shumëkëndësha kongruentë. Faqet e tjera janë drejtkëndësha. Këta trupa janë **prizma të drejtë**.

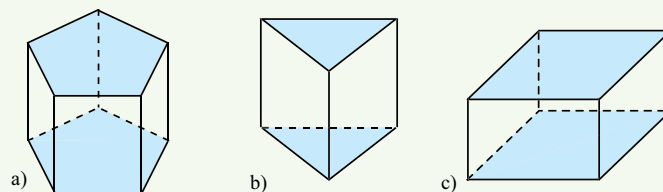


Fig. 10.45

Shumëkëndëshat kongruentë janë **bazat** e **prizmit**. Kuboidi është një lloj i veçantë **prizmi të drejtë**.

Prizmi emërtohet sipas bazës së tij. Prizmi në figurën (a) është pesëfaqësh. Prizmi në figurën (b) është trefaqësh. Prizmi në figurën (c) është katërfaqësh.



Mbani mend:

Prizmi i drejtë është shumëfaqësh. Ai ka:

- Dy baza paralele dhe kongruente (që mund të puthiten).
- Disa faqe anësore që janë drejtkëndësha.

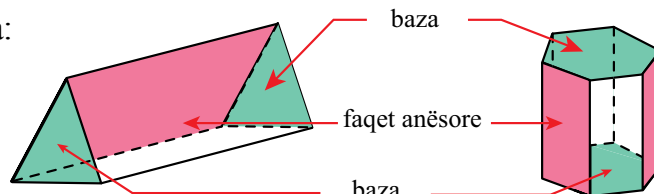


Fig. 10.46

Brinjët e prizmit të drejtë, që nuk janë brinjë të bazës quhen **brinjë anësore** ose **lartësi** të tij.



Kujdes!

Më poshtë, me fjalën “prizëm” do të nënkuptojmë gjithmonë “prizëm i drejtë”.

Për të vizatuar një prizëm trefaqësh, vizatoni dy trekëndësha kongruentë dhe bashkoni kulmet përgjigjëse të tyre, siç tregohet në figurë.

Në figurë janë treguar rrjetet (hapjet) e një prizmi trefaqësh, pesëfaqësh dhe gjashtëfaqësh.

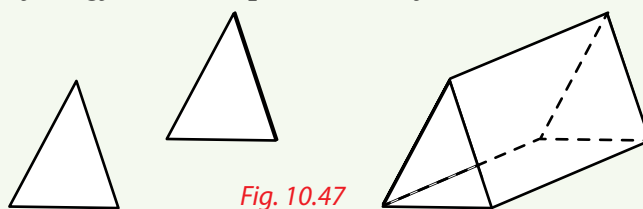


Fig. 10.47

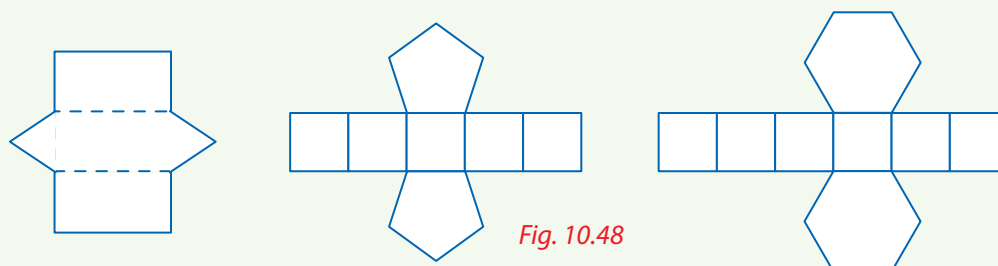


Fig. 10.48

**Mbani mend:**

Prizmi i drejtë që i ka bazat shumëkëndësha të rregullt quhet prizëm i rregullt.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Kubi dhe kuboidi janë prizma të drejtë. Argumentoni pse.
2. Për prizmin në figurë, baza është trekëndësh barabrinjës me brinjë 3 cm, ndërsa lartësia është 6 cm.
 - a) Sa cm tel duhet për skeletin e tij?
 - b) Sa cm² karton duhen për të bërë modelin e hapur të tij?

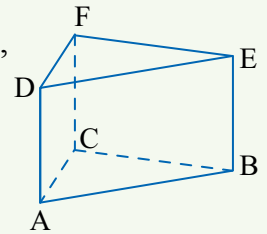


Fig. 10.49



3. Tregoni objekte të përdorimit të përditshëm që kanë formën e prizmit.

USHTRIME

- 1 Në figurë paraqiten disa prizma.

a. Cilët prej tyre janë kuboidë?

b. Cilët janë prizma trefaqësh?

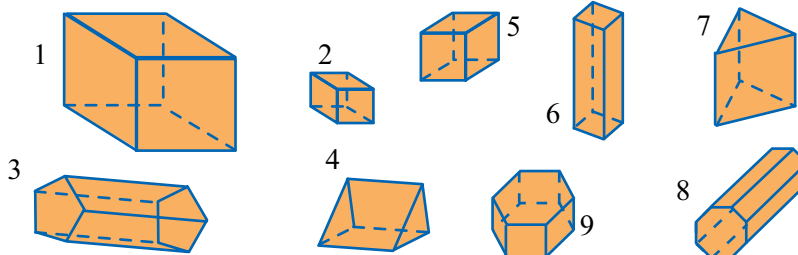


Fig. 10.50

- 2 Plotësoni paraqitjen e prizmit të dhënë në figurën 10.51, duke shënuar me vija të ndërprera brinjët e padukshme.

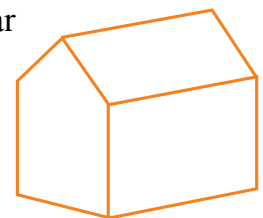


Fig. 10.51

- 3 a) Plotësoni tabelën.

Prizmi	trefaqësh	pesëfaqësh	gjashtëfaqësh
Nr. i faqeve			
Nr. i brinjëve			
Nr. i kulmeve			

b) A është i vërtetë barazimi: $K + F = B + 2$, ku K = numri i kulmeve; F = numri i faqeve; B = numri i brinjëve?

- 4 Plotësoni fjalitë:

a) Baza e prizmit të drejtë trefaqësh është _____, kurse faqet e tij janë _____.

b) Prizmi i drejtë me bazë drejtkëndësh quhet _____.

- 5 Pa vizatuar figurën, tregoni sa:

a) brinjë ka një prizëm pesëfaqësh;

b) faqe ka një prizëm gjashtëfaqësh;

c) kulme ka një prizëm shtatëfaqësh.

- 6 a) Vrojtuni prizmin e drejtë trefaqësh dhe plotësoni rrjetin (hapjen) e tij.

b) Gjeni syprinën anësore të prizmit, kur brinja e bazës është 2 cm dhe lartësia 5 cm.

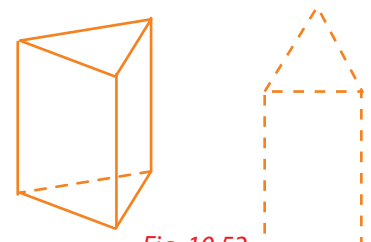


Fig. 10.52

10.7 Piramida

A Kërkoni dhe zbuloni

Piramidat e Gizës në Egjipt janë ndërtuar rreth 4500 vjet më parë.

Tregoni sa faqe ka piramida më e madhe e Gizës.

Çfarë forme gjeometrike ka?

A mund të gjeni numrin e brinjëve dhe të kulmeve të saj?

Bashkëbisedoni me shokun/shoqen.



Fig. 10.53

B Vrojtoni dhe mësoni

Në figurën 10.54 tregohet një piramidë, baza e së cilës është katror. Ajo quhet **piramidë me bazë katrore**.

Më poshtë paraqiten disa piramida të ndryshme. Baza e secilës piramidë është ngjyrosur.

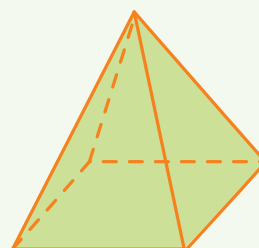
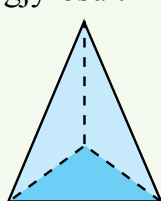
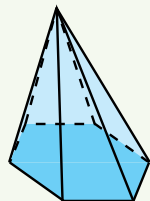


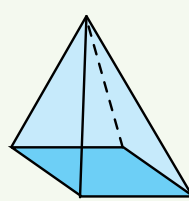
Fig. 10.54



piramida me
bazë trekëndore



piramida me
bazë gjashtëkëndore



piramida me
bazë katrore

Fig. 10.55



Mbani mend:

Piramida është një shumëfaqësh. Ajo ka një faqe shumëkëndëshe (trekëndësh, katërkëndësh, pesëkëndësh etj.), që quhet **bazë** dhe disa faqe anësore që janë trekëndësha. Të gjitha faqet anësore kanë një kulm të përbashkët, që quhet **kulm** i piramidës.

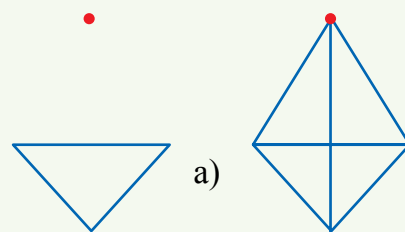
Piramida e merr emrin sipas shumëkëndëshit të bazës; për shembull, nëse baza është pesëkëndësh, piramida quhet pesëfaqëshe.



Kujdes!

Baza nuk është doemos “në fund” të piramidës, por është gjithmonë përballë kulmit.

Për të vizatuar një piramidë trefaqëshe, ju vizatoni një trekëndësh dhe një pikë jashtë tij dhe pastaj bashkoni kulmet e trekëndëshit me këtë pikë, siç tregohet në figurën 10.56/a.



Në figurën 10.56/b tregohen rrjetet (hapjet) e disa piramidave.

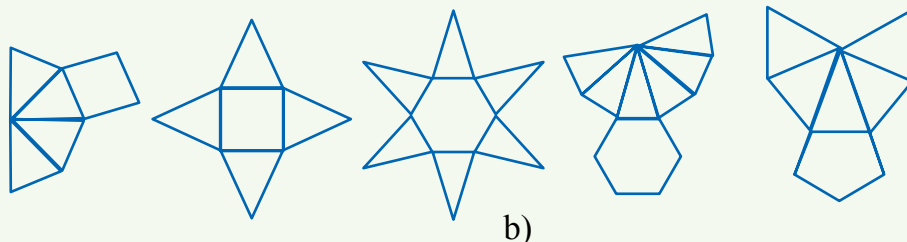


Fig. 10.56

**Mbani mend:**

Piramida quhet e rregullt nëse plotësohen dy kushte:

- Baza është një shumëkëndësh i rregullt.
- Brinjët anësore janë kongruente.

Lartësi e piramidës së rregullt është segmenti që bashkon kulmin me qendrën e rrethit të jashtëshkruar bazës.

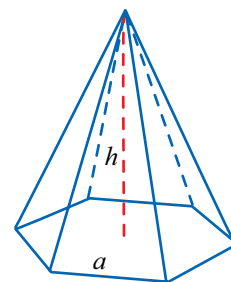
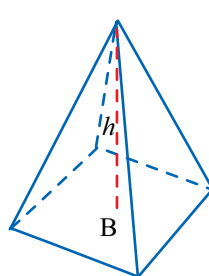


Fig. 10.57

Në piramidën e rregullt, faqet anësore janë trekëndësha barakrahës. Lartësitë e të gjitha faqeve anësore të piramidës së rregullt, hequr prej kulmit të saj, janë kongruente midis tyre; ato quhen *apotema* të piramidës.

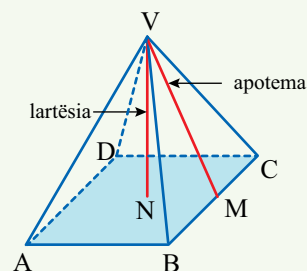


Fig. 10.58

C Ushtroni duke zbatuar

1. Në figurën 10.59 tregoni cilët trupa janë piramida.

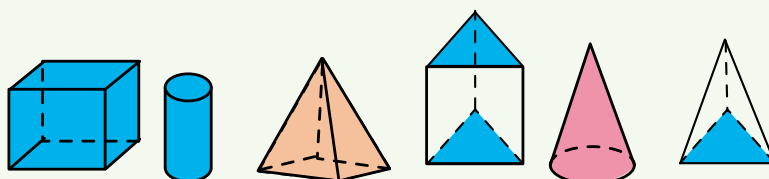


Fig. 10.59

2. Vizatoni një piramidë:

- a) trefaqëshe; b) katërfaqëshe; c) pesëfaqëshe.

Shënoni në të tri vizatimet, me vija të ndërprera, brinjët e padukshme.



3. Tregoni objekte të përdorimit të përditshëm që kanë formën e piramidës.

USHTRIME

1 a) Vrojtuni piramidat në figurën 10.60. Për secilën prej tyre tregoni numrin e faqeve dhe numrin e brinjëve.

b) Sa është numri i faqeve në një piramidë gjashtëfaqëshe?

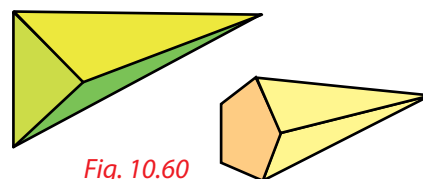


Fig. 10.60

2 a) Plotësoni tabelën.

Piramida	Numri i brinjëve	Numri i kulmeve	Numri i faqeve
Piramidë trefaqëshe			
Piramidë katërfaqëshe			
Piramidë pesëfaqëshe			

b) A është i vërtetë, për secilën piramidë, barazimi $K + F = B + 2$?

3 a) Riprodhoni në fletë me katrorë, hapjen e një piramide katërfaqëshe, siç tregohet në figurë.

b) Bëni prerjet dhe palosjet e nevojshme për të marrë modelin e piramidës.

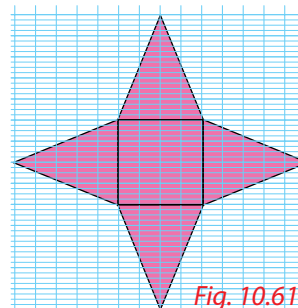


Fig. 10.61

10.8 Syprina e prizmit. Syprina e piramidës

A Kërkoni dhe zbuloni

Era do të konstruktojë një prizëm trefaqësh me bazë trekëndësh barabrinjës me brinjë 5 cm dhe brinjë anësore të prizmit 8 cm.

A i mjafton Erës një fletë kartoni me përmasa 20 cm me 15 cm për të konstruktuar rrjetin e prizmit?

Diskutoni me shokët/shoqet.

B Vrojtoni dhe mësoni

I. Syprina e prizmit

Syprinë anësore e prizmit quhet shuma e syprinave të faqeve anësore të tij.

Më poshtë paraqiten hapjet e prizmit trefaqësh dhe pesëfaqësh.

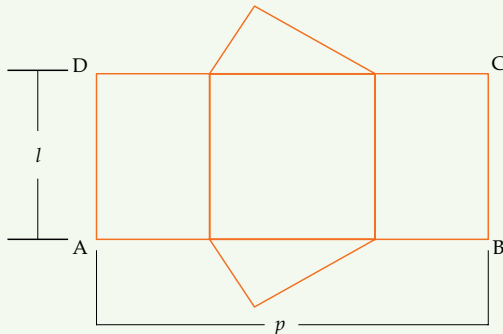


Fig. 10.62

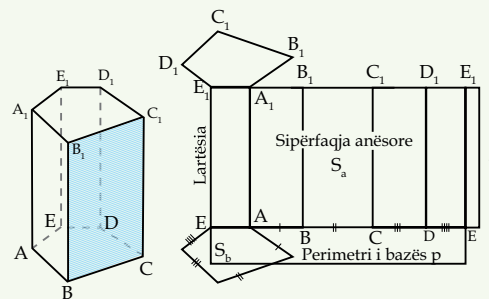


Fig. 10.63

Në secilin rast, hapja përbëhet nga dy bazat dhe faqja anësore. Të gjithë drejtkëndëshat që formojnë sipërfaqen anësore të prizmit kanë të njëjtën lartësi (brinjën anësore të prizmit). Nga kjo del se syprina anësore e prizmit është e barabartë me syprinën e drejtkëndëshit që ka si bazë perimetrin (p) të bazës së prizmit dhe si lartësi (l) brinjën anësore të prizmit.

Pra, $S_a = p \cdot l$.



Mbani mend:

Syprina anësore e prizmit të drejtë është e barabartë me prodhimin e perimetrit të bazës me brinjën anësore të tij.

Nëse shënojmë me S_b syprinën e bazës së prizmit, gjejmë që syprina e përgjithshme e prizmit është $S_p = S_a + 2S_b$.

Shembull

Gjeni syprinën anësore dhe syprinën e përgjithshme të prizmit të drejtë me bazë trekëndësh kënddrejtë me katete $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, hipotenuzë $c = 13$ cm, në qoftë se lartësia e prizmit është $l = 15$ cm.

Zgjidhje

Gjejmë fillimisht perimetrin e bazës së prizmit. Kemi:

$$P = a + b + c = 5 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 30 \text{ cm}. S_a = p \cdot l = 30 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 450 \text{ cm}^2.$$

Syprina e njërës bazë është: $S_b = (a \cdot b) : 2 = (5 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}) : 2 = 30 \text{ cm}^2$.

Syprina e përgjithshme e prizmit është:

$$S_p = S_a + 2S_b = 450 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 30 \text{ cm}^2 = 450 \text{ cm}^2 + 60 \text{ cm}^2 = 510 \text{ cm}^2.$$

II. Syprina e piramidës

Syprinë anësore e piramidës quhet shuma e syprinave të faqeve anësore të saj.

Në figurën 10.64 është paraqitur një piramidë e rregullt katërfaqëshe dhe hapja e saj në një rrafsh.

Për të gjetur syprinën anësore të piramidës së rregullt mjafton të gjejmë syprinën e njërit prej trekëndëshave të faqeve anësore dhe ta shumëzojmë me numrin e këtyre trekëndëshave (d.m.th. me numrin e brinjëve të bazës së piramidës). Trekëndëshi SBC ka për lartësi apotemën SE të piramidës

($SE = a$), prandaj kemi $S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot a$.

Syprina anësore e piramidës është $S_a = n \cdot S_{SBC} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot a = \frac{1}{2} (n \cdot BC) \cdot a$.

Por $n \cdot BC$ jep perimetrin p të bazës së piramidës, prandaj $S_a = \frac{1}{2} p \cdot a$.

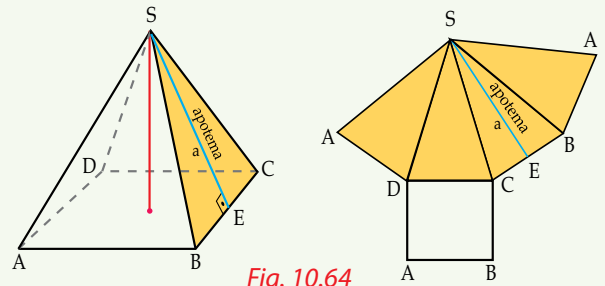


Fig. 10.64



Mbani mend:

Syprina anësore e piramidës së rregullt është e barabartë me gjysmën e prodhimit të perimetrit të bazës së saj me apotemën.

Nëse shënojmë me S_b syprinën e bazës së piramidës të rregullt, për syprinën e përgjithshme të saj kemi: $S_p = S_a + S_b$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Përmasat e një kuboidi janë 4 cm, 5 cm, 6 cm. Gjeni syprinën e përgjithshme të tij.

2. Në figurën 10.65 janë paraqitur prizma të drejtë, bazat e të cilëve janë shumëkëndësha të rregullt. Gjeni syprinat anësore të tyre.



3. A është e mjaftueshme një fletë llamarine me syprinë 500 cm^2 për të formuar një kuti të hapur nga sipër, me bazë katrore (me brinjë 12 cm) dhe me lartësi 5 cm?

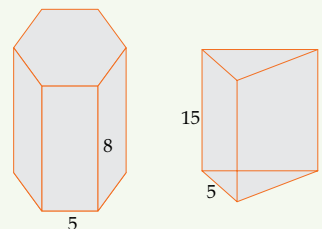


Fig. 10.65

USHTRIME

1 Bazë e prizmit të drejtë është trekëndëshi barabrinjës. Gjeni brinjën e këtij trekëndëshi, në qoftë se syprina anësore e prizmit është 96 cm^2 dhe lartësia e prizmit është 10 cm.

2 Baza e një prizmi të drejtë me lartësi 8 cm është romb. Gjeni brinjën e rombit, në qoftë se syprina anësore e prizmit është 160 cm^2 .

3 Sa kg ngjyrë duhet për të ngjyer anash një depozitë në formë prizmi të drejtë, me bazë trekëndëshin barabrinjës me brinjë 2,2 m. Lartësia e depozitës është 5 m. (Për të ngjyrosur 1 m^2 llamarinë duhen 150 g ngjyrë).

4 Në figurë jepet piramida e rregullt katërfaqëshe ABCDS, ku $AB = 10 \text{ cm}$ dhe $S_{ABCD} = S_{SDB}$. Gjeni:

- lartësinë e piramidës;
- brinjën anësore të saj;
- apotemën e piramidës;
- syprinën anësore të piramidës.

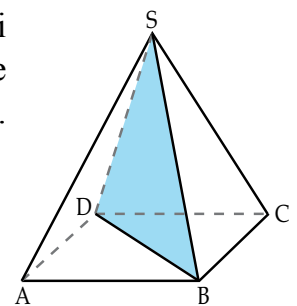


Fig. 10.66

10.9 Vëllimi i prizmit

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurë është paraqitur një kuboid me bazë katrore, i përbërë prej pllakash katrore të holla, të vendosura njëra mbi tjetrën. I zhvendosim pllakat njëra pas tjetrës, duke formuar një trup të pjerrët.

Nëse i presim dy trupat me një rrafsh paralel me rrafshin në të cilin ndodhen të dy bazat e trupave:

- si janë syprinat e prerjeve?
- si janë lartësitë e trupave?
- si janë vëllimet e trupave?

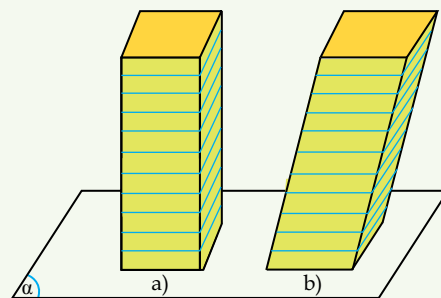


Fig. 10.67

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Masa e pjesës së hapësirës që zë një trup quhet vëllim i atij trupi. Të gjesh vëllimin e një trupi do të thotë ta krahasosh atë me një trup tjetër, vëllimi i të cilit merret si njësi (pra, të caktosh sa herë trupi përmban trupin me vëllim 1 njësi).

Si njësi e vëllimit merret vëllimi i kubit që e ka brinjën sa njësia e gjatësisë. Kjo njësi quhet njësi kubike, p.sh.: 1 m^3 ; 1 km^3 etj.

Me anë të matjes së vëllimeve realizohet një lidhje ndërmjet trupave dhe numrave që japin vëllimet e tyre.



Mbani mend:

- Trupat kongruentë kanë vëllime të barabarta.
- Në rast se një trup ndahet në disa pjesë që nuk priten, vëllimi i tij është sa shuma e vëllimeve të këtyre pjesëve.

Dini se vëllimi i kuboidit me përmasa a , b , c jepet me formulën $V = a \cdot b \cdot c$.

Ndryshe, duke shënuar me S syprinën e bazës së kuboidit dhe me h lartësinë e tij, gjejmë që vëllimi i tij është $V = S \cdot h$. Si rrjedhim, vëllimi i kubit me brinjë a është $V = a^3$.

Vëllimi i prizmit



Mbani mend:

Vëllimi i prizmit është i barabartë me prodhimin e syprinës së bazës me lartësinë e tij.

Shembulli 1

Gjeni vëllimin e prizmit trefaqësh të rregullt me brinjë të bazës a dhe me lartësi h .

Zgjidhje

Syprina e bazës së prizmit, që është trekëndësh i rregullt me brinjë a , është $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, prandaj vëllimi i prizmit është $V = S \cdot h = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$.

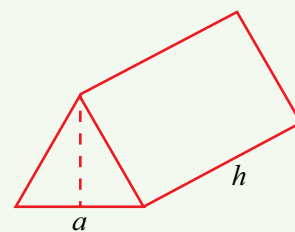


Fig. 10.68

Shembulli 2

Si bazë e prizmit të drejtë trefaqësh shërben trekëndëshi dybrinjënjëshëm ABC, me bazë me gjatësi $AB = 10$ cm dhe me brinjë anësore me gjatësi $CA = CB = 13$ cm. Lartësia e prizmit ka gjatësi $AA_1 = 10$ cm. Gjeni vëllimin e prizmit.

Zgjidhje

Në figurën 10.69/b është paraqitur trekëndëshi ABC i bazës së prizmit. Vizatojmë $[CH]$ pingule me $[AB]$. Kemi $AH = HB = 5$ cm (pse?). Në trekëndëshin kënddrejtë ACH shkruajmë:

$$CH^2 = CA^2 - AH^2 = 169 - 25 = 144 \text{ cm}^2. \text{ Pra, } CH = 12 \text{ cm.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2.$$

$$V = S_{ABC} \cdot AA_1 = 60 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} = 600 \text{ cm}^3$$

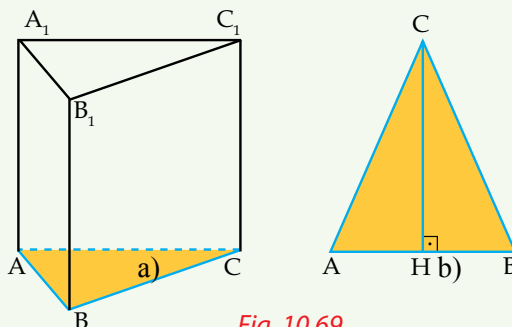


Fig. 10.69

C Ushtroni duke zbatuar

1. Syprina e kubit është numerikisht e barabartë me vëllimin e tij. Gjeni brinjën e kubit.
2. Në figurën 10.70, paraqitet prerja tërthore e trasesë së hekurudhës (të dhënat janë në m). Sa metra kub zhavorr përmban 1 km trase?



3. Përmasat e një tulle janë 25 cm, 12 cm, 6 cm. Sa tulla nevojiten për të ndërtuar një mur me gjerësi 25 cm, gjatësi 10 m dhe lartësi 1,8 m?

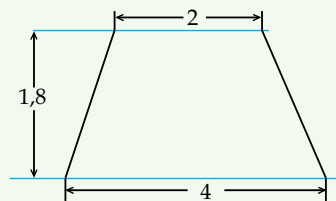


Fig. 10.70

USHTRIME

- 1 Prerja tërthore e një kanali vaditës është trapez dybrinjënjëshëm me baza 2 m dhe 3 m e me lartësi 1,5 m. Sa metra kub beton janë përdorur për betonimin e 1 km kanal?
- 2 Një pllakë hekuri me trashësi 6 mm ka përmasa 130 cm dhe 14 cm. Gjeni masën e saj. (Masa specifike e hekurit është $7,8 \text{ g/cm}^3$.)
- 3 Brinja e kubit rritet 2 herë. Sa herë rritet vëllimi i tij? Po syprina?
- 4 Një pishinë në formë kuboidi me gjatësi 12 m e gjerësi 8 m mbushet me ujë deri në thellësinë 2 m, nga një tub që lëshon 30 l ujë në sekondë. Për sa orë do të kryhet mbushja?
- 5 Jepet kubi me brinjë 2 cm. Me sa për qind rritet vëllimi i tij, nëse brinja rritet për 1 cm?
- 6 Baza e një prizmi të drejtë trefaqësh është një trekëndësh kënddrejtë me katete 4 cm dhe 3 cm. Më e madhja nga faqet anësore të prizmit është katror. Gjeni syprinën anësore, syprinën e përgjithshme dhe vëllimin e prizmit.

10.10 Vëllimi i piramidës

A Kërkoni dhe zbuloni

Në figurën 10.71 është treguar se si prizmi trefaqësh $ABCA_1B_1C_1$ mund të ndahet në tri piramida trefaqëshe me baza të barabarta dhe me të njëjtën lartësi.

Nëse syprina e bazës së prizmit është S dhe lartësia e tij është h , sa është vëllimi i piramidës A_1ABC ?

Bashkëbisedoni.

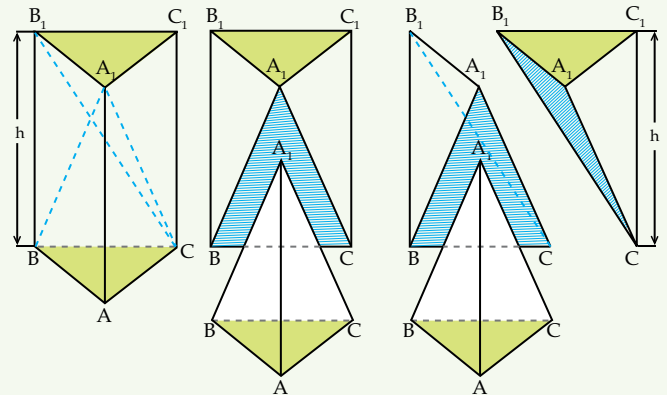


Fig. 10.71

B Vrojtoni dhe mësoni

Dy piramida me baza me të njëjtën syprinë dhe me lartësi të barabarta kanë vëllime të barabarta.



Mbani mend:

Vëllimi i piramidës është i barabartë me një të tretën e vëllimit të prizmit që ka bazë dhe lartësi të njëjtë me të.

Kjo është e vërtetë edhe për rastin e piramidës me bazë një shumëkëndësh çfarëdo.

Nëse shënojmë me S syprinën e bazës së piramidës (dhe të prizmit) dhe me h , lartësinë e piramidës (dhe të prizmit), nga fakti që vëllimi i prizmit është $V = S \cdot h$, rrjedh që vëllimi

i piramidës është $V = \frac{1}{3} S \cdot h$.

Shembull

Gjeni vëllimin e piramidës së rregullt katërfaqëshe, kur jepet brinja e bazës 6 cm dhe kur lartësia e saj është $3\sqrt{2}$ cm.

Zgjidhje

Në figurën 10.72 është dhënë $AB = BC = CD = DA = 6$ cm dhe

$SO = 3\sqrt{2}$ cm.

Vëllimi i saj është:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 36 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot \sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

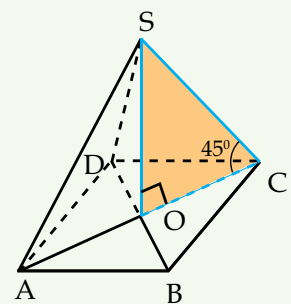


Fig. 10.72

C Ushtroni duke zbatuar

1. Gjeni vëllimin e piramidës së rregullt katërfaqëshe me brinjë të bazës 5 cm dhe lartësi 15 cm.
2. Gjeni vëllimin e piramidës së rregullt trefaqëshe me brinjë të bazës 6 cm dhe lartësi 20 cm.

3. Gjeni vëllimin e piramidës që ka të njëjtën bazë dhe lartësi me prizmin e dhënë në figurën 10.73.



4. Me plastelinën e një prizmi katërfaqësh të drejtë me brinjë të bazës 3 cm dhe lartësi 8 cm, Andi do të formojë piramida të rregullta katërfaqëshe me brinjë 2 cm dhe lartësi 4 cm. Cili është numri më i madh i piramidave që mund të formojë Andi?

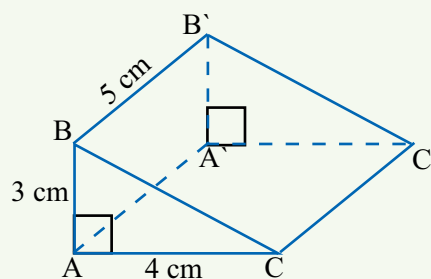


Fig. 10.73

USHTRIME

- 1 Gjeni vëllimin e piramidës së rregullt trefaqëshe me brinjë të bazës 6 cm dhe lartësi 15 cm.
- 2 Gjeni vëllimin e piramidës së rregullt gjashtëfaqëshe me brinjë të bazës 2 m dhe lartësi 12 m.
- 3 Gjeni vëllimin e piramidës së rregullt katërfaqëshe me syprinë të bazës 72 cm^2 dhe brinjë anësore 10 cm.
- 4 Syprina e bazës së një piramide katërfaqëshe të rregullt është 12 cm^2 dhe syprina anësore e saj është 24 cm^2 . Gjeni vëllimin.
- 5 Syprina e përgjithshme e një piramide katërfaqëshe të rregullt është 2400 cm^2 , ndërsa brinja e bazës është 30 cm. Gjeni vëllimin.
- 6 Gjeni vëllimin e piramidës së rregullt katërfaqëshe me diagonale të bazës 6 cm dhe lartësi 15 cm.
- 7 Gjeni vëllimin e piramidave të dhëna në figurë.

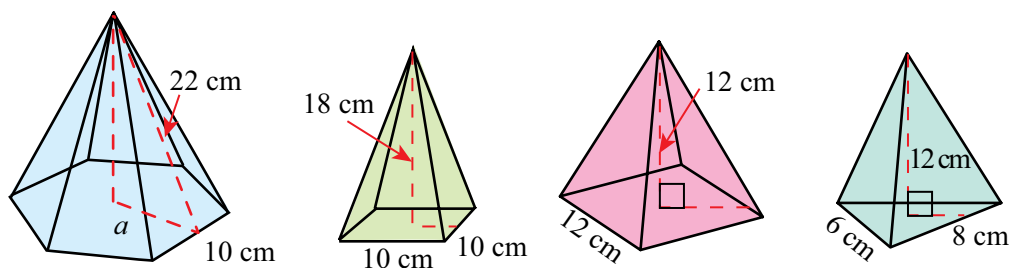


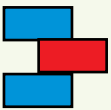
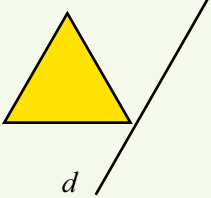
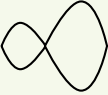
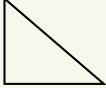
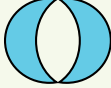
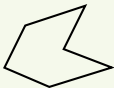
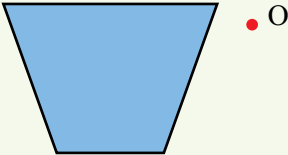
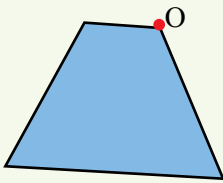
Fig. 10.74

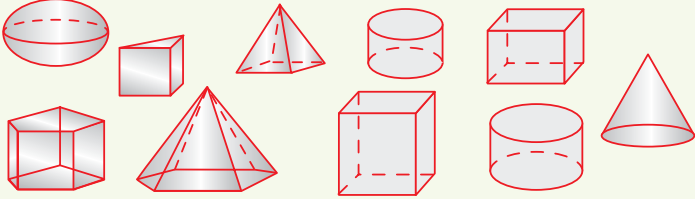
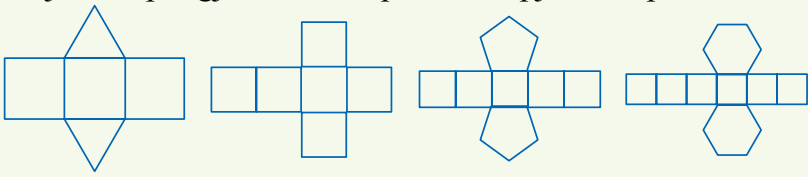


8 Piramida e Keopsit është më e madhja nga tri piramidat kryesore në Gizë dhe piramida më e lartë në botë. Ka një lartësi prej 146 m dhe gjatësinë e çdo brinje të bazës e ka 227 m. Gjeni vëllimin e saj.



10.11 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar	Provoni të zgjidhni
Konstruktimin e figurave me drejtëz simetrie.	- Ndërtoni në fletën me kuti një sistem kënddrejtë koordinativ dhe merrni në të pikën $A(3; 2)$. - Ndërtoni pikën simetrike të A në lidhje me boshtin $x'Ox$ dhe gjeni koordinatat e saj. - Ndërtoni pikën simetrike të A në lidhje me boshtin $y'Oy$ dhe gjeni koordinatat e saj. - Ndërtoni simetriket e figurave në lidhje me drejtëzën e dhënë d.   Fig. 10.75 - Vizatoni boshtet e simetrisë për secilën nga figurat.       Fig. 10.76
Konstruktimin e figurave me qendër simetrie.	- Cila është qendra e simetrisë së një drejtkëndëshi? Po e një gjashtëkëndëshi të rregullt? - Cila është figura simetrike e: - një katrori, në lidhje me pikën ku priten diagonalet; - një rrethi, në lidhje me qendrën e tij? - Në planin koordinativ ndërtoni pikat $A(2; 1)$ dhe $B(-2; 4)$. - Gjeni koordinatat e pikave simetrike të tyre në lidhje me origjinën O të sistemit koordinativ. - Cila është figura simetrike e segmentit $[AB]$? - Gjeni shëmbëllimin sipas pikës O të figurave:   fig. 10.77

Identifikimin e figurave dydimensionale në rrjetin e prizmit dhe të piramidës.	8. Pa konstruktuar figurën, tregoni sa: - brinjë ka një prizëm pesëfaqësh; - faqe ka një prizëm gjashtëfaqësh; - kulme ka një prizëm shtatëfaqësh. 9. Në figurat më poshtë, dalloni: a) piramidat; b) prizmat.  <i>Fig. 10.78</i>
Hapjen e trupave gjeometrikë.	10. Gjeni trupat gjeometrikë që kanë hapjet e mëposhtme:  <i>Fig. 10.79</i>
Formulat për njehsimin e sipërfaqes së prizmit.	11. Një prizëm i drejtë me lartësi 20 cm e ka bazën katror me perimetër 60 cm. Gjeni: - syprinën anësore të prizmit; - syprinën e përgjithshme të prizmit. 12. Bazë e prizmit të drejtë është trekëndëshi kënddrejtë me katete 6 cm e 8 cm. Lartësia e prizmit është sa kateti më i madh. Gjeni syprinën anësore dhe syprinën e përgjithshme.
Formulat për njehsimin e sipërfaqes së piramidës.	13. Në një piramidë të rregullt katërfaqëshe syprina anësore është 60 cm^2 dhe syprina e përgjithshme është 96 cm^2. Gjeni: - brinjën e bazës së piramidës; - apotemën e piramidës.
Formulën për njehsimin e vëllimit të prizmit të rregullt.	14. Gjeni vëllimin e prizmit të ushtrimeve 12 dhe 13.
Formulën për njehsimin e vëllimit të piramidës së rregullt.	15. Gjeni vëllimin e piramidës në ushtrimin 14.
Përdorimin e njohurive për zgjidhjen e problemave të ndryshme në shtëpi, punishte dhe komunitet që kanë të bëjnë me trupat gjeometrikë (prizmi, piramida).	16. Me një tabak llamarine me përmasa 100 cm dhe 55 cm, një punëtor duhet të ndërtojë një kuboid me përmasa 20 cm, 25 cm dhe 40 cm. A mund ta realizojë këtë, në qoftë se për prerjet dhe ngjitjet humbet 15% të materialit? Në qoftë se po, sa cm^2 llamarinë tepron? 17. Sa litra ujë nxë një depozitë në formë kuboidi, baza e të cilit ka përmasa 0,4 m dhe 0,5 m, ndërsa lartësia është 1,3 m? 18. Kryeni matje për të gjetur sipërfaqen dhe vëllimin e banesës suaj. Në një letër izometrike skiconi formën e saj.

10.12 Vlerësim

Koha: 45 minuta

- 1** a) Në rrafshin koordinativ paraqitni pikat $A(2; 2)$, $B(4; 2)$, $C(2; -3)$.
b) Përcaktoni llojin e trekëndëshit ABC dhe gjeni syprinën e tij. **(4 pikë)**
- 2** Në rrafshin koordinativ paraqitni pikën $P(6, 8)$.
a) Ajo është kulmi i një katrori $PQRS$ me brinjë paralele me boshtet.
b) Vizatoni këtë, duke ditur që syprina është 16 njësi katrore.
c) Cilat janë koordinatat e kulmeve të tjera? **(5 pikë)**
- 3** a) Ndërtoni në fletën me katrorë një sistem kënddrejtë koordinativ dhe merrni në të pikën $A(2; -4)$.
b) Ndërtoni pikën simetrike të A në lidhje me boshtin e abshisave dhe gjeni koordinatat e saj.
c) Ndërtoni pikën simetrike të A në lidhje me boshtin e ordinatave dhe gjeni koordinatat e saj. **(3 pikë)**
- 4** Pikat A , B janë simetrike të njëra-tjetrës në lidhje me drejtëzën d . Ç'është drejtëza d për segmentin $[AB]$? **(1 pikë)**
- 5** Në rrafshin koordinativ është dhënë segmenti $[AB]$, ku $A(2; 3)$ dhe $B(2; -1)$. Ndërtoni figurën simetrike të tij në lidhje me drejtëzën:
a) $x = 3$; b) $y = 1$. **(4 pikë)**
- 6** Vrojtoni kubin në figurë.

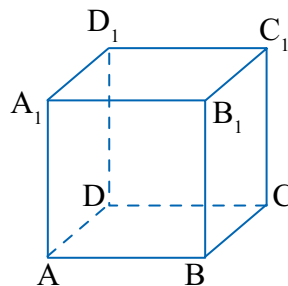


Fig. 10.80

- a) Tregoni kulmet dhe brinjët e padukshme.
b) Skeleti i këtij kubi është 24 cm i gjatë. Sa është syprina e përgjithshme e tij? **(4 pikë)**
- 7** Gjeni syprinën anësore, syprinën e përgjithshme dhe vëllimin e kuboidit me gjatësi 8 cm, gjerësi 5 cm dhe lartësi 10 cm. **(3 pikë)**

- 8** Në një piramidë të rregullt katërfaqëshe, brinja anësore është 12 cm dhe formon me diagonalen e bazës këndin 60° . Gjeni:
a) brinjën e bazës;
b) apotemën e piramidës;
c) syprinën anësore të piramidës;
d) vëllimin e piramidës.

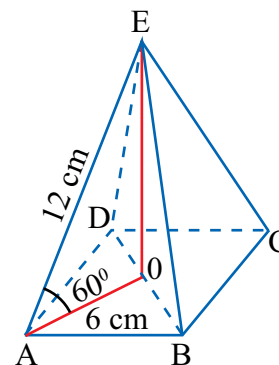


Fig. 10.81

(6 pikë)

11

FUNKSIONI

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- cakton vlerën e funksionit $y = f(x)$ për vlera të ndryshme të argumentit x ;
- paraqet pikat e funksionit me anë të tabelës, dyshe së renditur dhe në rrjetin koordinativ;
- ndërton grafikun e funksionit duke bashkuar pikat në rrjetin koordinativ;
- modelon në mënyrë grafike problema të ndryshme nga jeta e përditshme që kanë të bëjnë me funksionin $y = f(x)$.



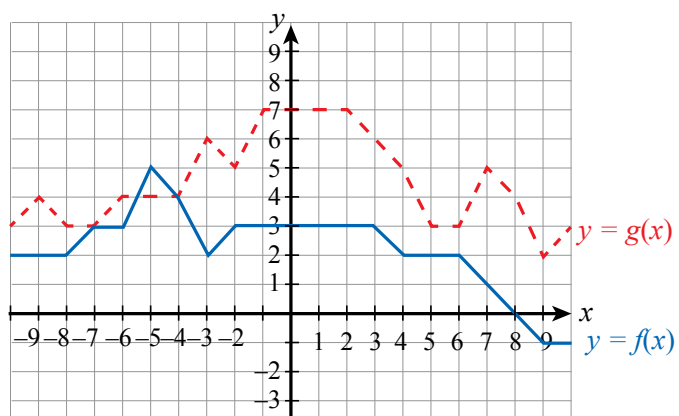
Fjalë kyçe:

funktion, ndryshore, bashkësi përcaktimi, bashkësi vlerash, dyshe të renditura, mënyra tabelare, formulë, grafiku i funksionit, pikë, rrjet koordinativ.

A E DINI SE...?



Rëne Dekart, matematikani francez, dha kontribute të çmueshme në matematikë. Sistemi koordinativ i Dekartit lejon që figurat gjeometrike të shprehen me ndihmën e ekuacioneve algjebrike, prandajai quhet babai i gjeometrisë analitike. Koncepti i funksionit u formalizua në fund të shekullit XIX. Më pas, fushat e zbatimit të këtij koncepti u zgjeruan e morën përmasa të rëndësishme. Funksionet përdoren gjerësisht në shkencë dhe në shumicën e fushave të matematikës. Roli i tyre është aq i rëndësishëm, saqë thuhet se ato janë “objektet qendrore të hulumtimit” në shumicën e fushave të matematikës.



11.1 Kuptimi i funksionit

A Kërkoni dhe zbuloni

Janë dhënë bashkësitë $A = \{3; 4; 6\}$ dhe $B = \{4; 5; 7\}$. Jepni shoqërimin, sipas rregullës “ x është një njësi më i vogël se y ”, të elementeve të A me elementet e B . Tregoni shoqërimin me diagram shigjetor, me dyshe të renditura dhe në sistemin koordinativ kënddrejtë. Përsëritni veprimet duke shoqëruar elementet e B me elementet e A sipas rregullit “ x është më madh se y ”. Krahasoni përfundimet në të dyja rastet. Çfarë vini re? Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni



Mbani mend:

Nëse çdo elementi të bashkësisë A i shoqërohet një element i vetëm i bashkësisë B , themi që kemi të bëjmë me një funksion të bashkësisë A në bashkësinë B . Përdoret shënimi “ $f: A \rightarrow B$ ”.

Bashkësia A quhet **bashkësia e përcaktimit të funksionit (domeni i funksionit)**.

Në qoftë se në funksionin “ $f: A \rightarrow B$ ” elementi $x_1 \in A$ shoqërohet me elementin $y_1 \in B$, duke formuar dyshen e renditur (x_1, y_1) , atëherë numri y_1 quhet **vlerë e funksionit** të shqyrtuar për $x = x_1$. Bashkësia B quhet **bashkësia e vlerave të funksionit (kodomeni i funksionit)**.

Shembulli 1

Janë dhënë bashkësitë $A = \{2; 3; 4; 5\}$ dhe $B = \{1; 2; 5; 7; 8\}$. Bëni shoqërimin e elementeve x të A me elementet y nga B sipas rregullës:

- “shuma e x me y plotpjesëtohet me 5”;
- “prodhimi i x me y është numër dyshifror”.
- Në cilat nga dy rastet e mësipërme kemi funksion me bashkësi përcaktimi A ?

Zgjidhje

- Për rastin e parë formohen dyshet: $(2; 8); (3; 7); (4; 1); (5; 5)$.
- Për rastin e dytë formohen dyshet: $(2; 5); (2; 7); (2; 8); (3; 4); (3; 5); (3; 7); (3; 8); (4; 5); (4; 7); (4; 8); (5; 2); (5; 5); (5; 7); (5; 8)$.
- Në rastin (a), çdo element i A shoqërohet me një element të vetëm të B , prandaj kemi funksion me bashkësi përcaktimi A . Në rastin (b) nuk kemi funksion me bashkësi përcaktimi A (pse?).

Shembulli 2

Nga shoqërimi i elementeve të bashkësisë A , që ka 10 elemente, me bashkësinë B janë marrë 11 dyshe të renditura të ndryshme. A kemi funksion?

Zgjidhje

Jo. Meqenëse A ka 10 elemente, por kemi 11 dyshe të ndryshme, të paktën një nga elementet e A është shoqëruar me elemente të ndryshme (më shumë se një) nga B .

C Ushtrohuni duke zbatuar

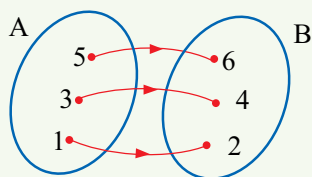
1. Jepet tabela:

x	2	5	7	8	9
y	1	4	6	7	8

11.2 Mënyra tabelare e dhënies dhe grafiku i funksionit

A Kërkoni dhe zbuloni

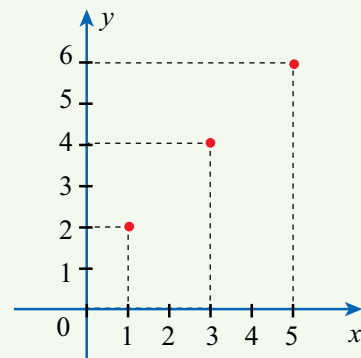
Në secilin nga rastet e mëposhtme është dhënë një funksion.



a)

A	5	3	1
B	6	4	2

b)



c)

Fig.11.1

Për secilin nga rastet tregoni bashkësinë e përcaktimit dhe atë të vlerave. Çfarë vini re? Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Është dhënë një tabelë numerike me dy rreshta, ku në rreshtin e parë nuk përsëriten numrat. Shënojmë me A bashkësinë e përbërë nga numrat e rreshtit të parë dhe me B bashkësinë e formuar nga numrat e rreshtit të dytë. Çdo vlerë të x nga rreshti i parë i tabelës i shoqërojmë vlerën e y , që ndodhet pikërisht nën të, në rreshtin e dytë. Kështu, çdo element i A i shoqërohet një element i vetëm i B, pra merret një funksion " $f: A \rightarrow B$ ". Për këtë funksion themi që është dhënë në mënyrë tabelare.



Mbani mend:

Grafik i funksionit " $f: A \rightarrow B$ " quhet bashkësia e pikave të rrafshit koordinativ xOy , të cilat kanë si abshisë elemente të A dhe si ordinatë vlerën përkatëse të funksionit.

Shembull

Për funksionin " $f: A \rightarrow B$ " janë dhënë të gjitha dyshet e renditura:

(1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (0; 1); (-1; 0); (-2; -1).

a) Shkruani bashkësinë e përcaktimit dhe bashkësinë e vlerave.

b) Jepni funksionin me tabelë.

c) Ndërtoni grafikun e funksionit.

d) Shprehni me fjalë rregullën e shoqërimit.

Zgjidhje

Bashkësia e përcaktimit: $A = \{1, 2, 3, 4, 0, -1, -2\}$;

Bashkësia e vlerave: $B = \{2, 3, 4, 5, 1, 0, -1\}$.

Funksioni jepet me tabelë:

x	1	2	3	4	0	-1	-2
y	2	3	4	5	1	0	-1

Grafiku i funksionit jepet në figurën 11.2.

Rregulla e shoqërimit është " $y = x + 1$ ".

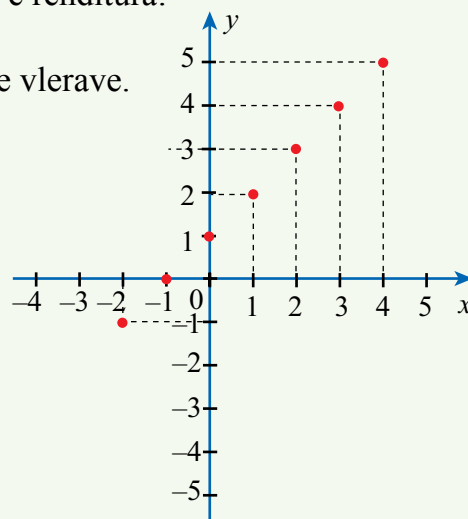


Fig. 11.2

C Ushtroni duke zbatuar

1. Funkzioni është dhënë me tabelë:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5	7

- a) Ndërtoni grafikun e funksionit.
b) Jepni me fjalë rregullën e shoqërimit.

2. a) A shërben bashkësia e pikave, e dhënë në figurën 11.3, si grafik funksioni?

- b) Nëse po, tregoni bashkësinë e përcaktimit dhe bashkësinë e vlerave.

- c) Jepni me fjalë rregullën e shoqërimit.

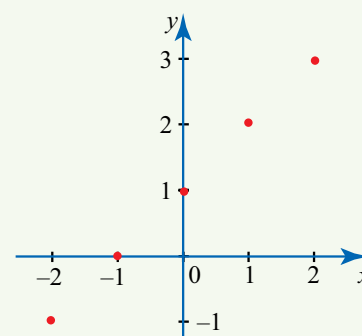


Fig. 11.3



3. Në figurë është paraqitur varësia e zgjatjes y (mm) të një suste nga masa x (kg) e varur në të. Tregoni bashkësinë e përcaktimit dhe bashkësinë e vlerave. Sa është y kur $x = 100$?

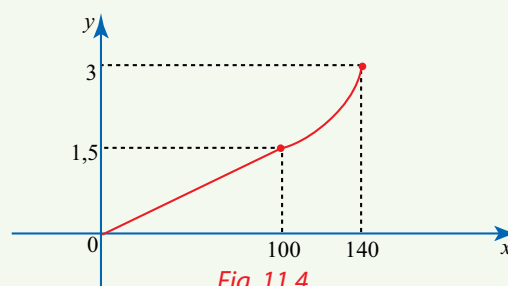


Fig. 11.4

USHTRIME

- 1 Çdo numri natyror njëshifror i shoqërojmë numrin e pjesëtuesve të tij. Jepni funksionin që merret, me tabelë dhe me grafik.

- 2 Jepni bashkësinë e përcaktimit të funksionit të dhënë me grafik në figurën 11.5.

- 3 Funkzioni është dhënë me tabelë. Ndërtoni grafikun e tij.

a)

x	3	0	6	12
y	1	0	2	4

b)

x	3	0	6	12
y	0	-1	1	3

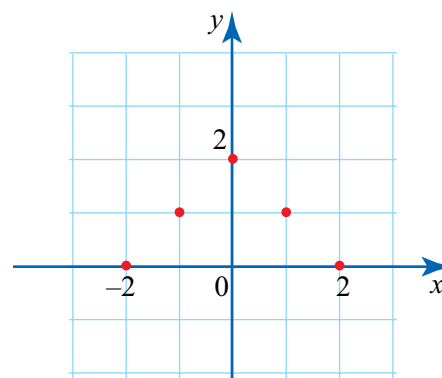


Fig. 11.5

- 4 Një skiator u nis nga hoteli dhe pas x orësh mbërriti në largësinë y prej tij. Varësia e y prej x jepet me tabelë:

x (orë)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3,5	4
y (km)	0	4,2	8,1	12,0	15,9	20,2	27,9	32,1

Ndërtoni grafikun e varësisë së y prej x .

- 5 Funkzioni $y = kx$ është dhënë me tabelë. Ndërtoni grafikun e tij, pasi të plotësoni tabelën.

x	0	2	3	4	5
y	0	4			

- 6 A shërbejnë vijat e dhëna në figurën 11.6 si grafik funksioni? Nëse po, jepni bashkësinë e përcaktimit dhe bashkësinë e vlerave.

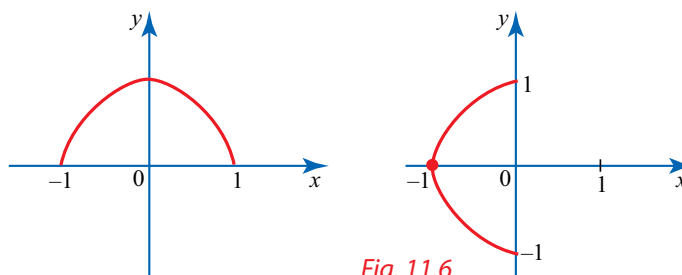


Fig. 11.6

11.3 Dhënia e funksionit me formulë

A Kërkoni dhe zbuloni

Në diagram tregohet një makinë-funksion.

Kur makina-funksion përdor një rregull, p.sh.: “shumëzo me 5 dhe shto 4”, duke

vendosur një numër në hyrje, merret një numër në dalje. Kështu, nëse numri në hyrje është 2, numri në dalje është 14, sepse $2 \cdot 5 + 4 = 14$.

Futni në hyrje disa numra. Kërkoni nga shoku/shoqja që të gjejë numrat në dalje.

Po nëse fusim ndryshoren x në hyrje, çfarë përftohet në dalje?

Diskutoni.

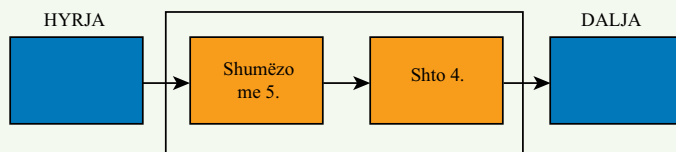


Fig. 11.7

B Vrojtoni dhe mësoni

Vutë re se nëse fusim në hyrje të makinës-funksion ndryshoren x , në dalje të saj do të kemi vlerën $y = 5x + 4$. Në këtë rast, funksioni është dhënë me ndihmën e formulës.

Shembull

Është dhënë bashkësia $A = \{1; 2; 4\}$ dhe shprehja $(7x + 1)$. Gjejmë për çdo vlerë të x nga A , vlerën përgjegjëse të shprehjes.

Në këtë rast diagrami i makinës-funksion do të ishte si në figurën 11.8.

Duke përdorur këtë makinë-funksion do të gjenim vlerat përgjegjëse për çdo vlerë të x : për $x = 1$ marrim $7 \cdot 1 + 1 = 8$, për $x = 2$ marrim $7 \cdot 2 + 1 = 15$, për $x = 4$ marrim $7 \cdot 4 + 1 = 29$.

Kemi marrë kështu një funksion me bashkësi përcaktimi A .

Për këtë funksion themi që është dhënë me anë të formulës $y = 7x + 1, x \in A$.

Ky është funksioni, që me tabelë jepet kështu:

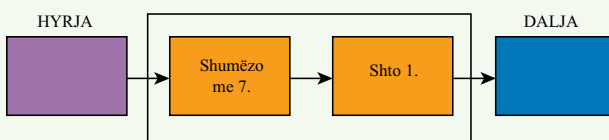


Fig. 11.8

x	1	2	4
y	8	15	29



Mbani mend:

Le të jetë dhënë një shprehje $f(x)$ me ndryshoren x . I shoqërojmë çdo vlerë të x nga bashkësia A (A nënbashkësi e Q), vlerën përgjegjëse të shprehjes $f(x)$. Marrim kështu një funksion (me bashkësi përcaktimi A) të bashkësisë A në bashkësinë e numrave racionalë Q . Për këtë funksion themi që është dhënë me formulën $y = f(x), x \in A$.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Jepet bashkësia $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ dhe formula $y = 2x - 3$. Ndërtoni makinën-funksion. Gjenin vlerën përgjegjëse për çdo vlerë të x . Jepni funksionin me tabelë. Ndërtoni grafikun e tij.

2. Shihni makinën-funksion në figurën 11.9.

a) A mendoni se numrat 5, 11, 14, 20, 32 dhe 302 janë në dalje të makinës?

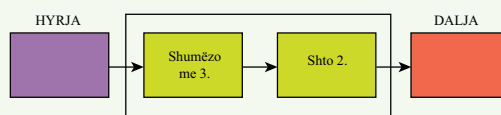


Fig. 11.9

- b) Cilët janë numrat në hyrje që japin numrat në dalje të renditur në pikën a)?
c) Shkruani formulën e funksionit.

3. Jepni me tabelë funksionin $y = 2x - 5$, për $x \in A$, ku $A = \{1; 2; 3\}$.

- a) Ndërtoni makinën-funksion.
b) Gjeni bashkësinë e vlerave të funksionit.
c) Tregoni funksionin me anën e dysheve të renditura.
d) Ndërtoni grafikun e tij.

4. Një fletore kushton 2 euro dhe një libër 4 euro. Nëse Agimi blen 2 fletore dhe një libër, sa euro i kushtojnë? Po nëse blen 4 fletore dhe një libër; 5 fletore dhe një libër, sa do t'i kushtojë Agimit?

Sa euro i kushtojnë Agimit, nëse blen x fletore dhe një libër? Shkruani një formulë.



USHTRIME

1 Jepet funksioni $y = \frac{3x-1}{2}$, $x \in \mathbb{N}$.

- a) Për ç'vlerë të x , funksioni merr vlerën 4?
b) A ka ndonjë vlerë të x për të cilën $y = x$?
c) A ka ndonjë vlerë të x për të cilën $y = 2x$?
d) Ndërtoni makinën-funksion për funksionin e dhënë.

2 Funksioni është dhënë me tabelë. Shkruani formulën për secilin nga funksionet.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	-1	-2

3 Numri d i diagonaleve të shumëkëndëshit varet nga numri i brinjëve të tij. Për disa vlera të n , kjo varësi jepet nga tabela:

n	3	4	5	6	7	8
d	0	2	5	9	14	20

Cila nga formulat e mëposhtme jep varësinë e d nga n ?

- a) $d = \frac{n(n+1)}{2}$; b) $d = n(n-1)$; c) $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

4 Shuma e këndeve të brendshme të një shumëkëndëshi varet nga numri n i brinjëve të tij. Për disa vlera të n kjo varësi jepet nga tabela:

n	3	4	5	6	7
S	180°	360°	540°	720°	900°

Cila nga formulat e mëposhtme jep varësinë e S nga n ?

- a) $S = n \cdot 180^\circ$; b) $S = (2n-1) \cdot 180^\circ$; c) $S = (n-2) \cdot 180^\circ$.

5 Funksioni është dhënë me grafik. Shkruani formulën e funksionit. Ndërtoni makinën-funksion për të.

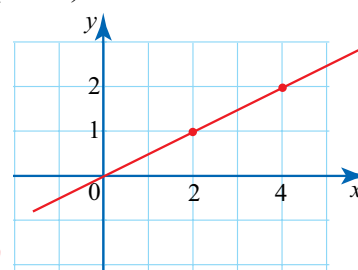


Fig. 11.10

11.4 Funkzioni $y = kx$

A Kërkoni dhe zbuloni

Diagrami tregon një makinë-funksion.

Shkruani formulën e funksionit. Përdorni disa vlera

të x në hyrje të makinës dhe gjeni vlerat dalëse.

Shkruani dyshet e renditura. Gjeni vendndodhjen e tyre në rrafshin koordinativ. Me ndihmën e vizores tërhiqni një vijë që kalon nga këto pika.

Çfarë vini re? Diskutoni.

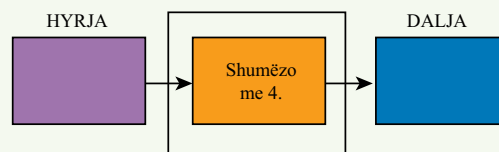


Fig.11.11

B Vrojtoni dhe mësoni

Shembulli 1

Shqyrtojmë drejtkëndëshin me bazë 3 dhe me lartësi x . Nëse shënojmë syprinën e tij me shkronjën y , do të kemi $y = 3x$. Nëse baza e drejtkëndëshit do të ishte k , syprina e tij do të ishte $y = kx$.

Le të jetë x ndryshorja që përshkon një bashkësi A numrash racionalë dhe k një numër racional. Duke i shoqëruar çdo vlerë të x nga A , vlerën përgjegjëse të shprehjes kx , marrim një funksion me bashkësi përcaktimi A . Për këtë funksion themi që është dhënë me formulën $y = kx$, $x \in A$.

Në rast se bashkësia e përcaktimit A është vetë bashkësia e numrave racionalë Q , themi thjesht që shqyrtohet funksioni $y = kx$.

Shembulli 2

Ndërtoni grafikun e funksionit $y = 2x$, $x \in Q$ (thjesht: $y = 2x$).

Zgjidhje

Marrim disa vlera të x dhe gjejmë vlerat përgjegjëse të funksionit, siç tregohet në tabelën e mëposhtme.

x	2	0	-3	-1
y	4	0	-6	-2

Në grafik do të vendosim pikat me koordinata $(2; 4)$, $(0; 0)$, $(-3; -6)$, $(-1; -2)$.

I ndëtojmë ato në rrafshin koordinativ xOy . Me anë të vizores, bindemi që të gjitha këto pika ndodhen në një drejtëz, që kalon nëpër origjinën e sistemit koordinativ.

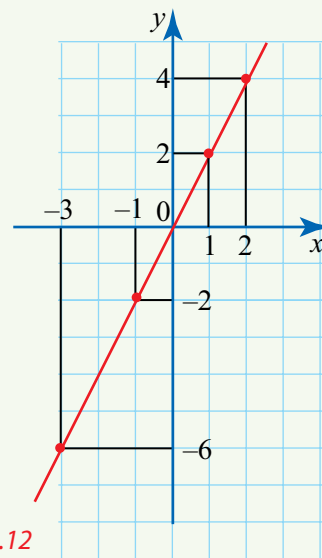


Fig. 11.12



Mbani mend:

Grafiku i funksionit $y = kx$, sidoqoftë numri racional k , është një bashkësi pikash që ndodhen në një drejtëz, e cila kalon nëpër origjinën e sistemit koordinativ.

Nga gjeometria dimë se, nëpër dy pika, kalon një drejtëz e vetme. Prandaj, për të ndërtuar grafikun e funksionit $y = kx$ mjafton të gjejmë dy pika të tij dhe më tej të heqim drejtëzën që kalon nëpër to.

Meqenëse njëra nga pikat e grafikut të $y = kx$ është origjina, atëherë mjafton të gjejmë edhe një pikë tjetër të tij.



Punë në grup

Ndërtoni grafikun e funksionit $y = kx$, nëse: a) $k = 1$; b) $k = -1$; c) $k = 0$. Cili është grafiku i funksionit për secilin rast? Diskutoni.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Ndërtoni grafikët e funksioneve: a) $y = 3x$; b) $y = -4x$; c) $y = -2x$.
2. Ndërtoni grafikun e funksionit $y = -1,5x$. Sipas grafikut gjeni:
 - a) vlerën e y që i përgjigjet $x = 1$; $x = 3$;
 - b) vlerën e x , nëse vlera e y është -3 ; $4,5$;
 - c) disa vlere të x , për të cilat vlere e y është pozitive;
 - d) bashkësinë e vlerave të x , për të cilat y është negativ.



3. Një kilogram rrush kushton 1,5 euro. Shprehni me formulë varësinë midis sasisë x në kg, të rrushit të blerë, dhe shumës së paguar P , në euro. Sa është $P(5)$? $P(11)$?

USHTRIME

- 1 Çmimi i benzinës është 1,15 euro për litër. Shprehni me formulë varësinë midis sasisë x të litrave në rezervuar dhe pagesës P , që është bërë për to. Gjeni $P(5)$; $P(18)$.
- 2 Ndërtoni grafikët e funksioneve.
 - a) $y = 1,5x$;
 - b) $y = -2,5x$;
 - c) $y = 0,8x$;
 - d) $y = -0,2x$.
- 3 Ndërtoni grafikun e funksionit $y = 0,2x$. Sipas grafikut gjeni:
 - a) vlerën e y që i përgjigjet $x = 2$; $x = 5$;
 - b) vlerën e x , nëse vlere e y është -5 ; $8,4$;
 - c) disa vlere të x , për të cilat vlere e y është pozitive;
 - d) bashkësinë e vlerave të x , për të cilat y është negativ.
- 4 Cilat nga pikat $A(5; -3)$; $B(-2; 4)$; $C(0; 0)$; $D(2; 1)$; $E(-5; 2,5)$ i përkasin grafikut të funksionit $y = \frac{1}{2}x$?
- 5 Sipas grafikut të dhënë në figurën 11.13 të funksionit $y = kx$, përcaktoni shenjën e koeficientit k . A mund ta gjeni vlerën e këtij koeficienti?
- 6 Varësia midis ndryshores x dhe y jepet me formulën $y = kx$. Gjeni k , duke ditur që për $x = 2,5$ kemi $y = -5$.
- 7 Autobusi dhe makina ndodhen 500 km larg njëri-tjetrit. Në figurën 11.14 janë paraqitur grafikët e lëvizjes së tyre. Në bazë të tyre, përgjigjuni pyetjeve:
 - a) Sa rrugë bëri për 3 orët e para makina? Po autobusi?
 - b) Me çfarë shpejtësie ecën ata deri te vendi i takimit?
 - c) Ç'rrugë bëri secili nga automjetet deri në vendin e takimit?
 - d) Me çfarë shpejtësie lëvizi secili prej tyre pas takimit?

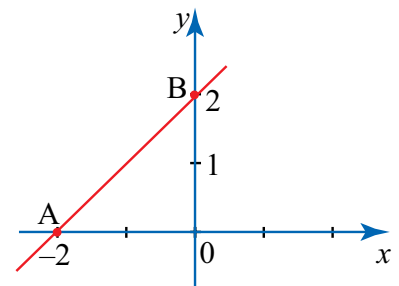


Fig. 11.13

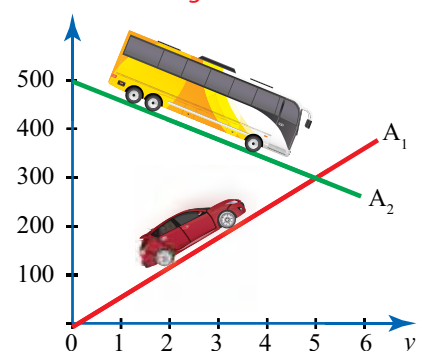


Fig. 11.14

11.5 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar

Provoni të zgjidhni

Caktimin e vlerave të funksionit $y = f(x)$ për vlera të ndryshme të argumentit x .

- Në figurë është paraqitur me diagram shigjetor, shoqërimi i elementeve të bashkësisë A me ato të bashkësisë B .
A është funksion ky shoqërim?
Tregoni bashkësinë e përcaktimit dhe bashkësinë e vlerave.
- Plotësoni diagramin, duke përdorur funksionin.

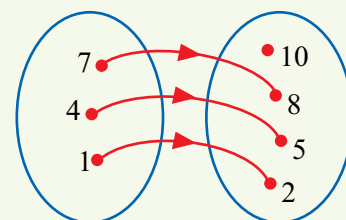


Fig. 11.15

funksioni
 $\cdot 2 \quad + 10$

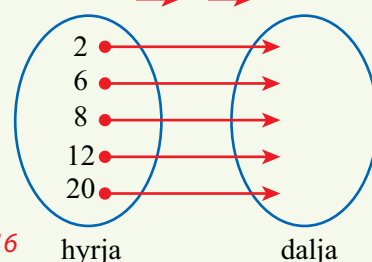


Fig. 11.16

hyrja

dalja

Paraqitjen e funksionit me anë të tabelës.

- Përdorni makinën-funksion për të plotësuar tabelën e mëposhtme.

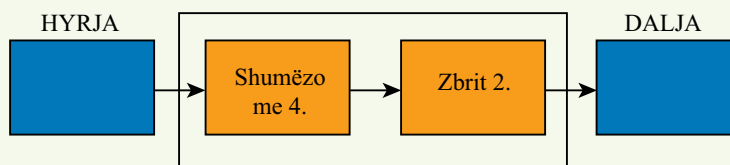


Fig. 11.17

Në hyrje (x)	-2	-1	0	1	2
Në dalje (y)					

- Çdo elementi të bashkësisë $A = \{12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$ i shoqërohet mbetja e pjesëtimit të tij me 7, $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
a) A kemi funksion të bashkësisë A në E ?
b) Jepeni këtë funksion me tabelë.

Paraqitjen e pikave të grafikut të funksionit me anë të dyshes së renditur dhe në rrjetin koordinativ.

- Në rrafshin koordinativ xOy janë dhënë pikat:
 $A_1(2; 3); A_2(3; 5); A_3(0; 1); A_4(1; 2); A_5(2; 4); A_6(3; 1)$.
Nëse abshisës së çdo pike i lidhim ordinatën e saj, a do të kemi funksion të bashkësisë së abshisave në bashkësinë e ordinatave?
- Në figurë është dhënë një bashkësi pikash.
Në cilin rast kemi funksion?
Shkruani bashkësinë e përcaktimit dhe të vlerave.

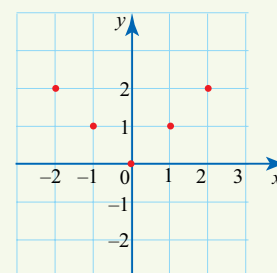
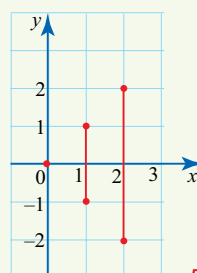


Fig. 11.18

Paraqitjen e funksionit me formulë.

7. Jepet tabela:

x	2	5	7	8	9
y	1	4	6	7	8

Shprehni me fjalë dhe me barazim shkronjor, rregullën e shoqërimit të elementeve të rreshtit të parë me ato të rreshtit të dytë.

8. Funksioni është dhënë me formulën $y = \frac{2x-1}{3}$ dhe $x \in \{2; 5; 8\}$.

a) Gjeni bashkësinë e vlerave.

b) Tregoni pikat e grafikut të funksionit.

c) A ka në grafik pikë me ordinatë 0?

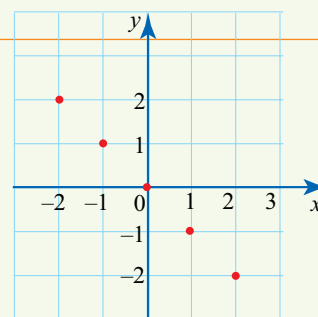


Fig. 11.19

9. Në figurë jepen disa nga pikat e grafikut të funksionit.

Gjeni koordinatat e tyre. Bashkoni pikat.

Tregoni veçori të grafikut të funksionit.

Jepni funksionin me formulë.

10. Në figurën 11.20 është paraqitur grafiku i një funksioni $y = f(x)$.

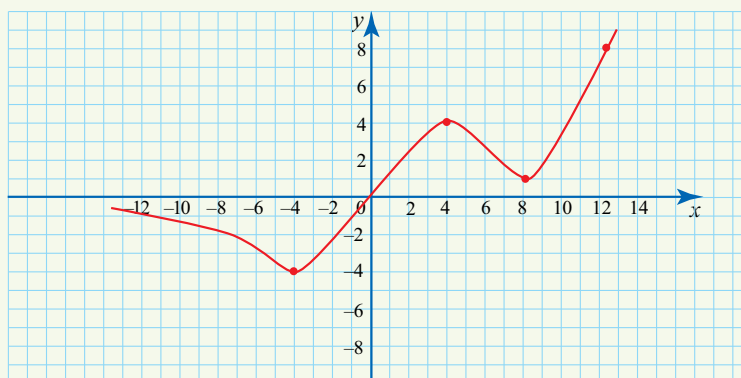


Fig. 11.20

a) Gjeni vlerat e y për $x = -9; -7; -4; -2$;

b) Gjeni vlerat e x për $y = -4; -3; -2; -1$.

Ndërtimin e grafikut të funksionit duke bashkuar pikat në rrjetin koordinativ.

Modelimin në mënyrë grafike të problemeve të ndryshme nga jeta e përditshme që kanë të bëjnë me funksionin $y = f(x)$.

11. Uji në çajnik në fillim kishte temperaturën 6°C . Gjatë ngrohjes, temperatura e ujit rritet çdo minutë me 2°C .

a) Shprehni me formulë varësinë e temperaturës T të ujit nga koha t e ngrohjes.

b) Pas sa kohe do të vlojë uji në çajnik?

12. Nga 5 kg grurë prodhohen 4 kg miell. Shënoni me y (kg) masën e miellit që prodhohet nga x kg grurë. Jepni me formulë varësinë e y nga x dhe ndërtoni grafikun e funksionit që merret.

13. Për të ngjyrosur një sipërfaqe me syprinë prej 64 m^2 duhen 16 kg ngjyrë. Shprehni me formulë varësinë e masës y të ngjyrës (kg), që nevojiten për të ngjyrosur një sipërfaqe me $x \text{ m}^2$ syprinë dhe ndërtoni grafikun e këtij funksioni.

11.6 Vlerësim

Koha: 45 minuta

- 1** Në figurë është paraqitur me diagram, shoqërimi i elementeve të bashkësisë A me ato të bashkësisë B.

- a) A kemi funksion?
b) Ndërtoni grafikun e funksionit.
c) Jepni funksionin me formulë.

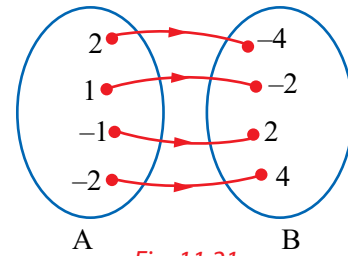


Fig. 11.21

(6 pikë)

- 2** Funksioni është dhënë me formulën $y = 3x - 4$, $x \in \{2; 4; 6\}$.

- a) Ndërtoni grafikun e funksionit.
b) A janë pikat e grafikut në vijë të drejtë?

(4 pikë)

- 3** Në figurën është dhënë grafiku i një funksioni:

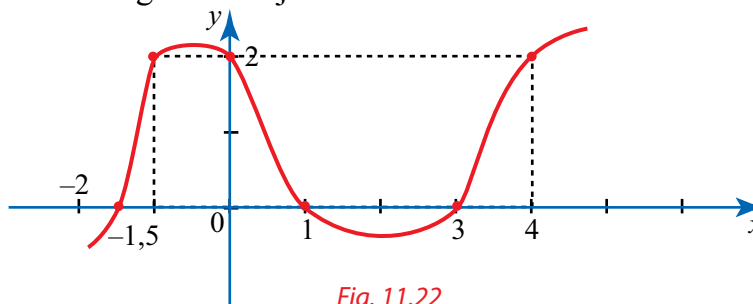


Fig. 11.22

- a) Gjeni vlerën e funksionit për $x = 1$; $x = -1,5$.
b) Për ç'vlera të x kemi $y = 2$?
c) Për ç'vlera të x , vlerat e funksionit janë negative?

(4 pikë)

- 4** Ndërtoni grafikët e funksioneve:

- a) $y = -2x$; b) $y = 3$.

(4 pikë)

- 5** Duke përdorur grafikun e varësisë së masës m të ujit (akullit) nga vëllimi V , përgjigjuni pyetjeve:

- a) A është varësia e masës nga vëllimi në përpjesëtim të drejtë?
b) Ç'vëllim zënë uji dhe akulli, nëse ata kanë të njëjtën masë, të barabartë me 500 g?

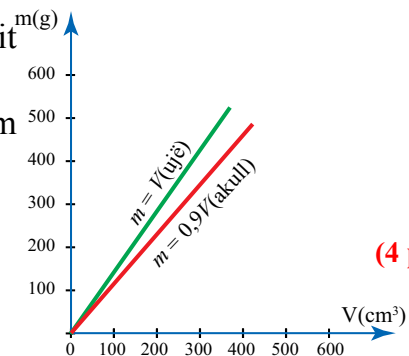


Fig. 11.23

(4 pikë)

- 6** Funksioni është dhënë me tabelë.

x	1	2	3
y	3	7	11

- a) Ndërtoni grafikun e tij. b) Jepni funksionin me formulë.

(4 pikë)

- 7** Më poshtë jepen grafikët e funksioneve. Shkruani formulën e funksionit për secilin rast.

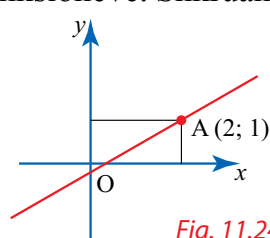
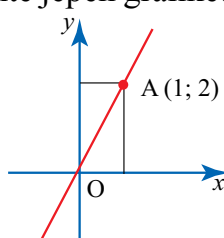
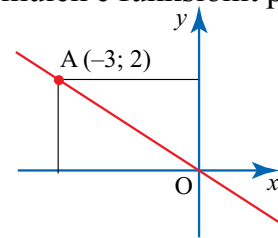


Fig. 11.24



(4 pikë)

12

STATISTIKA

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- grumbullon të dhënat statistikore për dukuritë që na rrethojnë;
- paraqet të dhënat e grumbulluara në tabela;
- ndërton diagrame në bazë të të dhënave të grumbulluara;
- cakton vlerat mesatare: mesataren aritmetike, modën dhe medianën;
- cakton frekuencën absolute dhe relative të një grupi të dhënash;
- përdor teknologjinë për zgjidhje të problemave në situata reale.



Fjalë kyçe:

të dhëna statistikore, të dhëna parësore dhe dytësore, të dhëna diskrete, grumbullim, pyetësor, tabelë, frekuencë absolute, frekuencë relative, mesatare aritmetike, medianë, modë, amplitudë, piktogram, diagrami shtyllë, diagrami rrethor.

A E DINI SE...?



Statistika moderne daton që nga mesi i shekullit XVII, kohë kur për herë të parë nisi të përdorej termi “statistikë”, në Gjermani. Me kalimin e kohës, ka pasur disa ndryshime në interpretimin e fjalës. Zhvillimi i statistikës është i lidhur ngushtë, nga njëra anë, me zhvillimin e shteteve moderne dhe, nga ana tjetër, me zhvillimin e teorisë së probabilitetit.

Në kohët e hershme, përdorimi i statistikës ishte i kufizuar në përpunimin e informacioneve mbi popullsinë (demografi). Më vonë, statistika nisi të përdorte lloje të ndryshme informacioni, duke përfshirë edhe analizën dhe interpretimin e të dhënave.

Shpesh, metodat statistikore lidhen me modele të bazuara në teorinë e probabilitetit.

Rritja gjithmonë e më domethënëse e sasisë së të dhënave të shumëllojshme të gatshme për analizë statistikore, i ka dhënë rëndësi të madhe përdorimit të informatikës në statistikë. Shumë koncepte statistikore kanë ndikim të rëndësishëm në një gamë të gjerë shkencash, qofshin këto shkencë të sakta apo shkencë sociale. Këto përfshijnë hartimin e eksperimenteve dhe qasjet ndaj përfundimeve statistikore.



12.1 Të dhënat e përshtatshme

A Kërkoni dhe zbuloni

Mësuesit e një shkolle janë të shqetësuar për sigurinë e nxënësve, që rrezikohen nga trafiku i makinave që lëvizin rreth shkollës, në fillim dhe në mbarim të mësimit. Ata menduan të bënin një hulumtim, duke mbledhur të dhëna për të vlerësuar rrezikun dhe për të gjetur një zgjidhje.

Mësuesit u bënë pyetje nxënësve për të mësuar se ku mendonin ata që duhej të përqendroheshin në këtë hulumtim. Sugjerimet ishin:

- Sa nxënës ka shkolla?
- Sa prej tyre shkojnë në shkollë në këmbë?
- Sa nxënës ka në çdo makinë që sjell nxënësit në shkollë?
- Në ç'orë arrijnë në shkollë shumica e nxënësve?
- Çfarë ngjyre kanë makinat që sjellin nxënësit në shkollë?
- Sa nxënës vijnë me autobus?
- Sa nxënës banojnë shumë larg shkollës?
- Sa vende parkimi ka para shkollës?
- Sa larg ndodhen vijat e bardha për kalimin e këmbësorëve?

A janë të përshtatshme të gjitha këto pyetje? Në qoftë se do t'ju duhej të zgjidhnit vetëm 5 pyetje, cilat do të zgjidhnit dhe pse? A mund të shtoni pyetje të tjera? Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

I. Skeda për mbledhjen e të dhënave

Një nga mënyrat e mbledhjes së të dhënave është mbajta e një skede të përshtatshme, e cila do të plotësohet gradualisht. Përparësia e skedës për mbledhjen e të dhënave ka lidhje me faktin që informacioni mund të përpunohet dhe të paraqitet në tabela lehtësisht të lexueshme.



Punë në grup

Krijoni një skedë për mbledhjen e rezultateve në testimin e matematikës (për djem e vajza) dhe gjatësinë e kohës që ata shohin televizor.

Djalë ose vajzë	Rezultati në testimin e matematikës	Në një javë, sa kohë (në orë) sheh televizor?

II. Pyetësorët

Hulumtimet mund të kryhen edhe me anë të një pyetësori, i cili është një listë pyetjesh që shpërndahet. Mënyra e hartimit të pyetësorit është shumë e rëndësishme. Ka më shumë gjasa që një pyetësor i mirë të plotësohet me përgjigje të sinqerta.

Këshilla për të hartuar një pyetësor të mirë

Tregohuni të sjellshëm. Shpjegoni qëllimin e pyetësorit.	P.sh.: “Po përpiqem të kuptoj se ç’mendim kanë njerëzit për bibliotekën e re”.
Hartojeni sa më të shkurtër.	Njerëzit nuk duan të harxhojnë shumë kohë duke mbushur pyetësorë. Mos bëni pyetje që nuk i shërbejnë qëllimit të pyetësorit.
Bëjini pyetjet të thjeshta dhe të mbyllura (pra, përgjigjet të jenë me alternativa). Nëse është e nevojshme, përfshini edhe intervale kohore.	P.sh.: “Mesatarisht, sa orë në javë shihni televizor?” 0-1orë; 2-3 orë; 4-5 orë; më shumë se 5 orë. Kur pyetja është pa alternativa në përgjigje, ajo është pyetje e hapur. P.sh.: “Mesatarisht, sa orë në javë shihni televizor?”. Në këtë rast, përgjigjja mund të jetë “shumë”, përgjigje që nuk na vjen në ndihmë. Edhe intervali kohor është i rëndësishëm, pasi duhet përcaktuar që bëhet fjalë për një ditë, një javë, një muaj etj.
Sigurohuni që alternativat e përgjigjeve nuk mbivendosen dhe i mbulojnë të gjitha mundësitë.	P.sh., nëse shkruani: “Shënoni me kryq grup-moshën tuaj”: ☐ 0-24; ☐ 24-30; ☐ 31-38; ☐ 40-60; ☐ më shumë se 61, personi që është 24 vjeç ka dy kuti ku mund të shënojë kryq, ndërsa ai që është 39 vjeç nuk ka asnjë kuti.
Bëjini me takt pyetjet personale.	Disa njerëz ndihen më mirë duke shënuar kryq në kutinë e grup-moshës sesa duke plotësuar moshën e saktë të tyre.
Mos bëni pyetje të drejtpërdrejta.	Pyetje si: “A jeni dakord që...?” mund të prodhojnë përgjigje të njëanshme.
Si fillim, bëni një hulumtim pilot.	Shtypni disa kopje të pyetësorit dhe shpërndajini në pak njerëz. Bazuar në përgjigjet e tyre, mund të verifikoni nëse çdo gjë është e qartë dhe e kuptueshme. Korrigjoni gabimet, para se të vazhdoni me shumëfishimin e pyetësorit.

C Ushtroni duke zbatuar

- Diskutoni për secilën nga çështjet e mëposhtme. Cilat pyetje do të ishin më të përshtatshme, kur bëjmë hulumtime:
 - për një problem të vogël në shkollë?
 - për rregullat e qytetit në lidhje me riciklimin?
 - për këndvështrimet e njerëzve rreth një qendre të re sportive në qytet?
 - për përdorimin e ndërtesave dhe të terreneve të shkollës?

- Blerta do të hulumtojë për këndvështrimet e nxënësve rreth uniformës së shkollës. Ajo vendosi të bënte këto pyetje:

- Jeni mashkull apo femër?
- Sa vjeç jeni?
- A vishni uniformë shkollë?
- A ju pëlqen uniforma shkollë? Pse?
- Me çfarë mjeti vini në shkollë?
- Si e ka emrin mësuesi/ja juaj?

Cila nga pyetjet nuk është e përshtatshme? Shkruani pyetje të cilat do ta ndihmonin Blertën në hulumtimin e saj.

USHTRIME

- Ju duhet të gjeni llojet e programeve televizive që preferohen nga mosha e gjini të ndryshme. Krijoni një skedë për mbledhjen e këtyre të dhënave.
- Hartoni disa pyetje për një pyetësor me anë të të cilit do të gjeni se si e kalojnë kohën e lirë shokët dhe shoqet tuaja.
- Një kompani dëshiron të dijë se çfarë mendojnë qytetarët për fushatën e saj publicitare. Shkruani pesë pyetje të mundshme për pyetësorin e tyre.

12.2 Mbledhja e të dhënave

A Kërkoni dhe zbuloni

Mblidhni informacion nga shokët e klasës rreth ushqimit të parapëlqyer ndër këto alternativa:

- *pulë e pjekur*
- *makarona*
- *pica*
- *sallatë*



Tregoni si do ta mblidhni informacionin. Paraqiteni informacionin në një tabelë të frekuencave (dendurive) absolute.

B Vrojtoni dhe mësoni

Në detyrën e mësipërme mund të siguron mbledhjen e të dhënave ose të informacionit në mënyra të ndryshme: duke pyetur secilin nga shokët dhe shoqet në mënyrë individuale; duke i kërkuar secilit të vërë një shenjë pranë njërit prej ushqimeve; duke lexuar listën dhe duke u kërkuar të votojnë parapëlqimin e tyre me ngritje dore.



Mbani mend:

Të dhënat që i mblidhni vetë, në këtë mënyrë, quhen të dhëna **parësore**. Nëse dikush tjetër i ka mbledhur të dhënat nga një burim tjetër (p.sh.: nga interneti), ato quhen të dhëna **dytësore**.

Të dhënat mund të jenë të dhëna **diskrete** dhe të dhëna **të vazhdueshme**.

Shembull

Të dhënat për lojën e parapëlqyer, numrin e këmbës, numrin e anëtarëve në familje, numrin e votuesve, etj., janë të dhëna diskrete.

Të dhënat për gjatësinë e nxënësve të klasës, masat e nxënësve, largesën shtëpi-shkollë etj., janë të dhëna të vazhdueshme.

Të dhënat e grumbulluara mund të paraqiten, me ndihmën e simboleve, në tabelën e frekuencave (dendurive).



Mbani mend:

Frekuenca (denduria) absolute është numri i përsëritjeve të një të dhëne. Frekuenca (denduria) relative është herësi ndërmjet frekuencës absolute të një të dhëne dhe numrit të të gjitha të dhënave të grumbulluara.

Në anë jepet një tabelë frekuencash ku janë grumbulluar të dhëna për ushqimin më të pëlqyer.

Shenja |||| përfaqëson 5 shokë. Në qoftë se keni numër shumë të madh të dhënash, organizimi i tyre në tabela të tilla nuk është shumë praktik.

Në vazhdim është paraqitur numri i sekondave gjatë të cilave njerëz të ndryshëm arrijnë ta mbajnë frymën.

Ushqimi	Me simbole	Denduria
pulë e pjekur		4
makarona	 	7
pica	 	16
sallatë	 	13

Fig. 12.1

Ndërtojmë një tabelë frekuencash për të mbledhur të dhënat.

10 24 16 37 36 32 34 18 26 22 20
31 31 26 16 31 11 40 13 42 35

Nëse secila vlerë do të konsiderohet veçmas, tabela e mëposhtme e frekuencave nuk do të jetë shumë e dobishme.

Numri i sekondave	10	11	12	13	14	15	16	...	Shuma
Frekuenca	1	1	0	1	0	0	2	...	21
Frekuenca relative	1:21	1:21	0	1:21	0	0	2:21	...	1

Në raste të tilla përdoret tabela e frekuencave të grupuara. Tabela e mësipërme do të paraqitet si në figurën 12.2. Kur ndërtoni një tabelë frekuencash të grupuara, sigurohuni që të mos ketë mbivendosje të grupimeve. Nuk mund të keni grupime të tilla: 10-20; 20-30, sepse vlera 20 do të bënte pjesë në dy grupime.

Numri i sekondave	Me simbole	Denduria
10-19		6
20-29		5
30-39		8
40-49		2

Fig. 12.2

C Ushtroni duke zbatuar

- Shkruani numrat që përfaqëson secili prej simboleve në figurën 12.3.
- Ndërtoni një tabelë frekuencash për të mbledhur të dhënat e mëposhtme mbi numrin e nxënësve që paraqiten me vonesë në shkollë për çdo ditë të një muaji:

11 16 11 12 15 14 13 12 12 14 12 13
13 11 14 12 15 12 13 15 16 10 11 10

- a) |||
b) ||| ||| ||| |||
c) ||| |||
d) ||| ||| ||| ||| ||| ||| ||| |||

Fig. 12.3

-  3. Mblidhni informacion nga shokët e klasës rreth lojës së parapëlqyer ndër këto: futboll, voleyboll, basketboll, tenis dhe pingpong. Tregoni si do ta mblidhni informacionin. Paraqitni informacionin në një tabelë të frekuencave.

USHTRIME

- 1** Më poshtë jepen moshat e personave që marrin pjesë në një festë:

2 13 4 17 36 64 45 18 41 51 18 18
17 15 65 28 16 18 27 21 18 17 19 44

Përzgjidhni një simbol dhe plotësoni tabelën e frekuencave të grupuara.

- 2** Ndërtoni një tabelë frekuencash të grupuara për të paraqitur pikët e një testimi në matematikë, të dhëna më poshtë. Gjeni frekuencat relative.

41 61 70 52 76 48 59 59 88 60 94 64
53 73 44 84 56 98 74 66 77 65 56 86



- 3 Shkoni në një vend të sigurt nga ku keni mundësi të shihni trafikun e makinave. Përdorni shënimet me simbole për të regjistruar numrin e çdolloj mjeti (veturë, autobus, minibus, kamion, motoçikletë, biçikletë) që kalon gjatë 30 minutave. Paraqitni informacionin në një tabelë frekuencash.

12.3 Mesataret dhe amplituda

A Kërkoni dhe zbuloni

Kryeni matje trupore për vajzat dhe djemtë e klasës suaj. Për shembull: masa, shtatlartësia, numri i këmbës etj.

- Cilët kanë shtatlartësi mesatare më të madhe, djemtë apo vajzat?
- Cilët kanë masë mesatare më të madhe, djemtë apo vajzat?
- Cili është numri i këmbës më i shpeshtë ndër shokët/shoqet e klasës?

Diskutoni për të dhënat e grumbulluara.

B Vrojtoni dhe mësoni

Mesatarja është një vlerë e vetme që përshkruan një grup të dhënash. Ka tre tipa mesataresh: mesatarja aritmetike; moda; mediana (mesorja). Secila prej tyre përdoret në varësi të rrethanave.



Mbani mend:

Për të gjetur mesataren aritmetike të një grupi të dhënash, shuma e të gjitha vlerave pjesëtohet me numrin e tyre. Shpesh, mesatares aritmetike i referohemi vetëm me termin “mesatare”.

Shembulli 1

Gjeni mesataren aritmetike të një nxënësi në gjashtë testime: 85; 74; 92; 69; 81 dhe 78 pikë.

Zgjidhje

Mesatarja e pikëve të nxënësit është:

$$\frac{\text{Shuma e pikëve}}{\text{Numri i testimeve}} = \frac{85 + 74 + 92 + 69 + 81 + 78}{6} = \frac{479}{6} = 78,5.$$



Mbani mend:

Moda është vlera që përsëritet (ndeshet) më shpesh. Në rastin kur të dhënat i kemi grupuar në klasa, përdoret termi klasë modale.

Shembulli 2

Një mëngjes, në një dyqan u shitën 10 palë këpucë. Numrat e tyre ishin: 36; 37; 37; 35; 38; 39; 38; 39; 39; 35. Cila është moda?

Zgjidhje

Vërejmë se këpucët me numër 39 janë shitur më së shumti (3 herë). Pra, moda është 39.



Mbani mend:

Mediana (mesorja) është vlera e mesit në një grup të dhënash të renditura nga më e vogla te më e madhja.

Shembulli 3

Gjeni medianën (mesoren):

- a) E pikëve në një testim në lëndën e matematikës: 51; 42; 38; 84; 93.
- b) E temperaturave: 16°C; 23°C; 20°C; 18°C; 17°C; 25°C.

Zgjidhje

- a) Pikët në rend rritës janë: 38; 42; 51; 84; 93. Vlera e mesit është 51, e cila është mediana e pikëve.
- b) Temperaturat në rend rritës janë: 16°C; 17°C; 18°C; 20°C; 23°C; 25°C. Dy vlerat e mesit janë 18°C dhe 20°C. Mediana është gjysmëshuma e këtyre vlerave, pra 19°C.

**Mbani mend:**

Ndryshimi ndërmjet vlerës më të madhe dhe vlerës më të vogël quhet **amplitudë**. Amplituda tregon se sa të shpërndara janë vlerat.

Shembulli 4

Gjeni amplitudën e grupit të të dhënave: 2; 11; 7; 3; 2; 8; 4.

Zgjidhje

Vlera më e madhe është 11; vlera më e vogël është 2. Amplituda = $11 - 2 = 9$.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Joni mori 6 bishtaja me bizele. Numri i kokrrave në bishtaja ishte: 7; 8; 10; 5; 6; 6.
 - a) Sa kokrra bizele mbledhi ai gjithsej?
 - b) Sa është mesatarja aritmetike e kokrrave të bizeles në një bishtajë?
2. Nila bleu 5 pako me karamеле. Numri i karamелеve në secilën pako ishte: 28; 32; 29; 31; 30. Sa është mesatarja aritmetike e karamелеve në një pako?
3. Mesatarja aritmetike e karamелеve në një pako është 24 karamеле. Sa karamеле kanë afërsisht në të tria paketot?
4. Lartësia e pesë luleve në cm është: 12 cm, 7 cm, 6 cm, 11 cm, 11 cm.
 - a. Cila është moda e lartësive?
 - b. Cila është mediana e lartësive?

USHTRIME

- 1 Një magazinier kontrollon kutitë me kapëse që kishte në magazinë. Numri i kapëseve në tetë kuti ishte: 48; 52; 52; 51; 49; 47; 53; 48. Cila është mesatarja e kapëseve në një kuti?
- 2 Mesatarja aritmetike e pesë numrave është 5. Në qoftë se katër prej numrave janë 4; 3; 7 dhe 2, cili është numri i pestë?
- 3 Mesatarja aritmetike e shtatlartësive të pesë nxënësve është 158 cm. Në qoftë se shtojmë edhe një nxënës tjetër, atëherë mesatarja aritmetike bëhet 158,4 cm. Sa është shtatlartësia e nxënësit të gjashtë?
- 4 Numrat e këmbëve të tetë nxënësve janë: 38; 36; 34; 36; 36; 37; 39; 40.
 - a) Cila është moda? b) Cila është mediana?
 - c) Cila prej këtyre të dhënave është më e rëndësishme për menaxherin e një dyqani këpucësh? Pse?
- 5 Temperaturat në aeroportin “Adem Jashari” për gjashtë ditë ishin: 21°C; 23°C; 19°C; 25°C; 25°C; 24°C.
 - a) Cila është mediana e temperaturave në këtë periudhë?
 - b) Cila është moda e temperaturave?

12.4 Përdorimi i tabelave të frekuencave (dendurive)

A Kërkoni dhe zbuloni

Për 20 ditë, një kompani ajrore regjistroi vonesat, në minuta, në nisjen e avionit të një prej linjave të saj: 2; 7; 4; 2; 4; 7; 6; 3; 4; 2; 6; 2; 6; 5; 3; 7; 5; 6; 6; 3.

Për të gjetur mesataren aritmetike të kohës së nisjes së avionit me vonesë, duhen mbledhur numrat e mësipërm dhe shuma e tyre duhet pjesëtuar me 20.

A mund ta gjeni më shpejt?

Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Për t'i mbledhur këta numra, nuk është e nevojshme t'i marrim me radhë. Këto veprime mund të kryhen edhe më shpejt. Vëmë re se numrat përsëriten. Kështu, numri 2 përsëritet katër herë; numri 3 përsëritet tri herë; numri 4 përsëritet tri herë; numri 5 përsëritet dy herë; numri 6 përsëritet pesë herë dhe numri 7 përsëritet tri herë. Kështu:

$$\text{Mesatarja aritmetike} = \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 7}{20} = \frac{90}{20} = 4,5.$$

Kjo tregohet më qartë në tabelën e mëposhtme:

Vlera numerike	Frekuenca	Vlera numerike · frekuenca
2	4	$2 \cdot 4 = 8$
3	3	$3 \cdot 3 = 9$
4	3	$4 \cdot 3 = 12$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$
6	5	$6 \cdot 5 = 30$
7	3	$7 \cdot 3 = 21$
Shuma	20	90

Kjo është një metodë e rëndësishme që përdoret kur frekuencat janë vërtet të larta.

Moda ose klasa modale prej tabelës së frekuencave

Në qoftë se të dhënat jepen në një tabelë frekuencash, duhet të shihni frekuencën më të lartë për të gjetur modën. P.sh.:

Pikët	2	3	4	5	6	7
Numri i nxënësve	4	3	3	2	5	3

Frekuenca më e lartë është 5. Numri i pikëve me këtë frekuencë është 6. Moda është 6.

Në qoftë se të dhënat janë në një tabelë frekuencash të grupuara, mund të gjeni klasën modale, e cila i korrespondon intervalit me frekuencën më të lartë.

Shembull

Grup-moshat e 50 banorëve të një fshati janë:

Grup-mosha	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
Frekuenca	12	9	7	7	6	4	3	1	1

Grup-mosha me frekuencë më të lartë është 0-9 vjeç. Klasa modale është 0-9 vjeç.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Numri i librave të lexuar gjatë pushimeve verore nga 24 nxënës jepet në tabelën e frekuencave. Plotësoni dhe gjeni mesataren aritmetike dhe modën.

Numri i librave	Frekuenca	Gjithsej libra të lexuar
1	2	
2	9	18
3	4	
4	9	
Shuma		

2. Tabela më poshtë tregon pikët e 30 nxënësve në një provim.

Pikët	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numri i nxënësve	2	0	3	2	3	5	8	4	2	1

Gjeni mesataren aritmetike të pikëve dhe modën.



3. Masat e 100 nxënësve të shkollës janë:

Masa (në kg)	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70
Frekuenca	6	8	22	31	12	11	5	5

Gjeni mesataren aritmetike të masave, klasën modale dhe frekuencat relative.

USHTRIME

- 1 Tabela më poshtë tregon moshat e 20 nxënësve që morën pjesë në një konkurs muzikor.

Mosha në vite	12	13	14	15	16	17
Numri i nxënësve	4	4	5	3	3	1

Gjeni moshën mesatare të garuesve dhe modën.

- 2 Ana numëroi njerëzit që ishin në 50 veturat që kaluan në një rrugicë të qytetit të saj. Më poshtë jepen shënimet e Anës:

1; 1; 1; 1; 1; 2; 1; 1; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 4; 2; 1; 1; 3; 1; 1; 4; 1; 1; 2; 2; 1; 3; 1; 2; 1; 1; 3; 1; 3; 1; 2; 1; 1; 2; 1; 4; 2; 1; 1; 2; 2; 1; 3; 3.

Krijoni një tabelë frekuencash për këto të dhëna dhe përdorini ato për të gjetur mesataren aritmetike dhe modën e numrit të njerëzve për makinë.

- 3 Përdorni një tabelë frekuencash për të llogaritur mesataren aritmetike të këtyre numrave: 6; 2; 1; 5; 3; 1; 2; 4; 4; 3; 4; 5; 6; 2; 1; 1; 3; 2; 2; 5.

- 4 Pikët e 70 nxënësve në një testim janë:

Pikët	0-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
Frekuenca	2	5	10	13	21	6	6	3	2	2

Gjeni klasën modale dhe frekuencën relative.

- 5 Tabela tregon shtatlartësitë e nxënësve në një klasë të shtatë të një shkolle. Gjeni mesataren, modën dhe frekuencat relative.

Shtatlartësia	136	138	139	141	142	143
Frekuenca	6	5	4	4	9	2

12.5 Piktogramet

A Kërkoni dhe zbuloni

Tabela tregon sportin që pëlqejnë më shumë nxënësit e klasës së shtatë të kësaj shkolle. Përzgjidhni një simbol. Paraqitini të dhënat me ndihmën e tij.

Basketboll	Futboll	Hendboll	Volejboll
13	10	19	9

B Vrojtoni dhe mësoni

Shembulli 1

Tabela e mëposhtme paraqet numrin e mungesave të nxënësve në klasën e Bardhit gjatë një jave.

Dita	E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte
Numri i mungesave	2	3	5	1	7

Në cilën ditë munguan më shumë nxënës?
Diagrami në figurën 12.4, ku secila shenjë paraqet një nxënë, jep informacionin e kësaj tabele.

Klasa e 7A	Mungesat e nxënësve javën e kaluar
E hënë	
E martë	
E mërkurë	
E enjte	
E premte	
	 paraqet një nxënë.

Fig. 12.4



Mbani mend:

Për të paraqitur të dhëna diskrete, piktogrami përdor figura apo vizatime.

Shembulli 2

Duke përdorur piktogramin, plotësoni tabelën për të treguar sa libra u shitën për çdo ditë të javës së kaluar në një librari.

Zgjidhje

Dita	E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte	E shtunë
Librat e shitur	35	7	28	42	35	56

Në këtë rast, përdoret shkalla 1 me 7.

Librat e shitur javën e kaluar	
E hënë	
E martë	
E mërkurë	
E enjte	
E premte	
E shtunë	
	 përfaqëson 7 libra.

Fig. 12.5

Shkalla ju tregon numrin e objekteve që përfaqëson secili simbol. Çdo piktogram duhet të ketë një shkallë.

C Ushtroni duke zbatuar

- Piktogrami tregon mjetet me të cilat nxënësit e klasës së 7-të të një shkolle vijnë çdo ditë në shkollë.
 - 20 nxënës të klasës së 7 udhëtojnë çdo ditë me makinë. Çfarë shkalle është përdorur në piktogram?

Mënyra si vijnë në shkollë nxënësit çdo ditë	
Me makinë	
Me autobus	
Me biçikletë	
Në këmbë	

Fig. 12.6

- b) Çfarë duhet të ishte shkruar në fund të piktogramit?
 c) Shkruani numrin e nxënësve që vijnë çdo ditë në shkollë në këmbë, me biçikletë dhe me autobus?



2. Piktogrami tregon numrin e kafshëve shtëpiake që mbajnë nxënësit e një klase.

- a) Sa nxënës mbajnë zogj?
 b) Sa nxënës janë përfshirë në hulumtim?
 c) Ç'pjesë e nxënësve mbajnë lepuj?

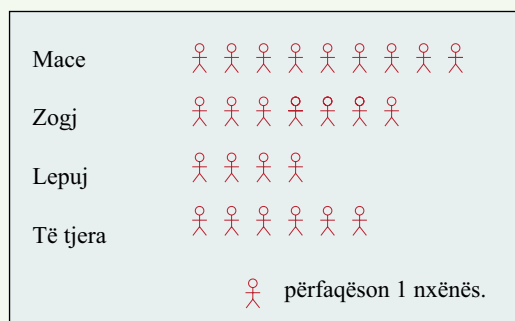


Fig. 12.7

USHTRIME

1 Veprimtaritë jashtëshkollore të zgjedhura nga nxënësit e një klase tregohen në piktogram.

- a) Sa nxënës kanë zgjedhur pikturën?
 b) Cila është veprimtaria më pak e ndjekur?
 c) Sa nxënës janë përfshirë në hulumtim?

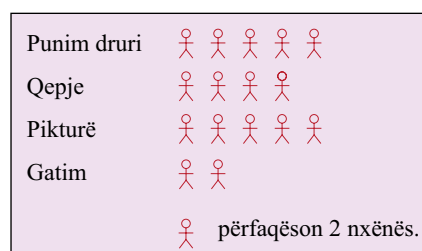


Fig. 12.8

2 Lëndët e parapëlqyera nga disa nxënës paraqiten në piktogram.

- a) Sa nxënësve u pëlqen më shumë lënda e historisë?
 b) Cila është lënda që pëlqehet më shumë?
 c) Cila është lënda që pëlqehet më pak?
 d) Sa nxënës janë përfshirë në hulumtim?

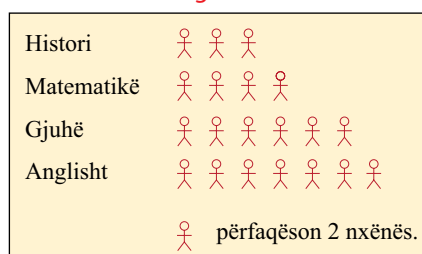


Fig. 12.9

3 Më poshtë jepet numri i nxënësve në dy vitet e para të një shkolle.

Klasa	1A	1B	1C	2A	2B	2C
Numri i nxënësve	40	35	45	45	40	40

- a) Sa nxënës do të përfaqësohen me ?
 b) Konstruktioni një piktogram për këtë tabelë.

4 Në një turne basketbolli për një trofe të veçantë, pikët e shënuara nga skuadrat ishin:

Skuadra	A	B	C	D	E
Pikët	44	32	56	48	52

- a) Çfarë simboli do të përdorni për të paraqitur pikët në piktogram?
 b) Çfarë shkalle mund të përdorni?
 c) Konstruktioni një piktogram për të treguar pikët.

5 Timi është peshkatar. Sasia e peshkut që ai zuri për 6 javë jepet në tabelë:

Java	E parë	E dytë	E tretë	E katërt	E pestë	E gjashtë
Sasia e peshkut të kapur (kg)	150	140	130	110	150	130

- a) Çfarë simboli do të përdorni për sasinë e peshkut të zënë?
 b) Konstruktioni një piktogram për ta paraqitur këtë informacion.
 c) A mund ta paraqitni në një mënyrë tjetër informacionin?

12.6 Diagrami me shtylla

A Kërkoni dhe zbuloni

Përgatisni një skedë me ngjyrat që pëlqehen më shumë. Pyesni shokët dhe shoqet tuaja. Plotësoni tabelën me informacionin që do të grumbulloni.

Ngjyra që pëlqehet më shumë	E kaltër	Rozë	E gjelbër	Portokalli	E kuqe	Vjollcë	E verdhë
Numri i nxënësve							

Plotësoni tabelën në programin kompjuterik *Excel*. Gjeni komandën përkatëse dhe paraqitini të dhënat me anë të një diagrami.

Diskutoni.

B Vrojtoni dhe mësoni

Shpeshherë, piktogrami merr shumë kohë për të vizatuar simbolet. Një diagram me shtylla konstruhet më shpejt. Në një diagram me shtylla, për të paraqitur objektin, në vend të një simboli përdoret një katror i vogël. Diagramet me shtylla quhen edhe grafikë me shtylla.



Mbani mend:

Për të paraqitur të dhëna, një diagram me shtylla përdor shtylla me gjatësi ose lartësi të ndryshme. Diagrame të tilla mund të vizatohen me shtylla horizontale ose vertikale. Zakonisht, përdorim boshtet numerike. Shtyllat në diagrame nuk duhet ta takojnë njëra-tjetrën.

Shembull

Tabela më poshtë tregon mjetet me të cilat vijnë çdo ditë në shkollë nxënësit e klasave të shtata të një shkolle.

Mjeti i transportit	Me autobus	Me makinë	Me biçikletë	Më këmbë
Numri i nxënësve	70	40	20	80

Diagrami me shtylla paraqet këtë informacion.

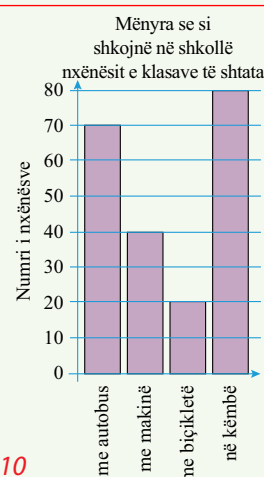


Fig. 12.10

Të dhënat mund të paraqiten edhe në një diagram me vija në vend të shtyllave. Në një diagram me vija, gjatësia e vijës tregon frekuencën. Diagrami me vija është praktik në rastet kur ka shumë shtylla, pasi vija zë më pak hapësirë.



Punë në grup

Grumbulloni të dhëna për numrin e figurave që ndodhen në librat tuaj shkollore. Hartoni tabelën e frekuencave.

Paraqitni të dhënat me anë të diagramit shtyllë dhe me vija.

Përpiquni të përdorni programin kompjuterik *Excel*.

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Profesionet e nënave të nxënësve të një shkolle jepen në tabelë:

Profesioni	Mjeke	Mësuese	Nëpunëse	Juriste	Shtëpiake
Numri i nënave	70	100	120	80	90

Çfarë shkalle do të përdorni për t'i paraqitur këto të dhëna në një diagram me shtylla? Ndërtoni diagramin.



2. Shkruani muajin e lindjes për secilin nxënës të klasës suaj. Plotësoni tabelën e mëposhtme:

Muaji i lindjes	Numri i nxënësve
Janar	
Shkurt	
Mars	
...	

- a) Në cilin muaj kanë lindur më shumë nxënës?
b) Në një fletë me katrorë, bëni një kopje më të madhe të diagramit me shtylla për të treguar të gjithë muajt e vitit. Plotësoni informacionin nga tabela.

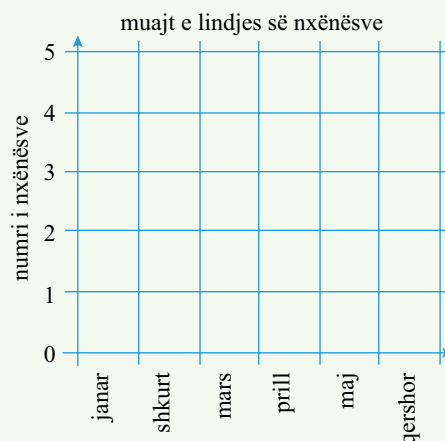


fig. 12.11

USHTRIME

- 1 Tabela më poshtë tregon lëndët që pëlqehen nga nxënësit e klasës së 7-të.

Lëndët	Gjuhë shqipe	Matematikë	Anglisht	Histori	Gjeografi	Edukatë fizike
Numri i nxënësve	6	7	10	5	6	8

- a) Për të paraqitur këtë informacion, në një fletë me katrorë, konstruktioni një diagram me shtylla.
b) Cila është lënda që pëlqehet më pak?

- 2 Grafiku me shtylla tregon ditët e javës, në të cilat disa nxënës kanë ditëlindjet për këtë vit. Përdorni këtë diagram për t'iu përgjigjur pyetjeve:

- a) Për këtë vit, sa nxënës e kanë ditëlindjen të shtunën?
b) Për këtë vit, sa nxënës e kanë ditëlindjen të dielën?
c) Në cilën ditë është numri më i madh i ditëlindjeve?

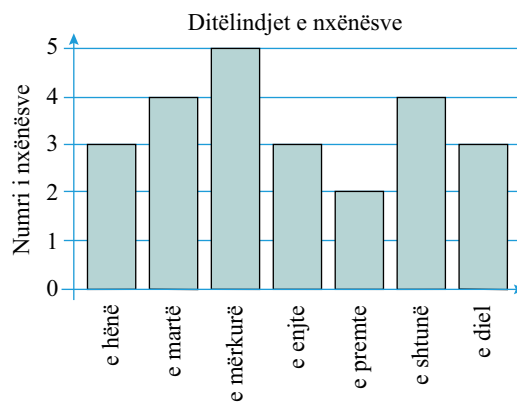


Fig. 12.12

12.7 Diagrami rrethor

A Kërkoni dhe zbuloni

Diagrami tregon se si e kalon ditën (24-orëshe) Suzana.

- Sa sektorë të barabartë ka ky diagram rrethor?
- Sa orë paraqet secili sektor?
- Plotësoni:

Veprimtaria	Gjumë	Detyra shtëpie	Në shkollë	Ngrënie dhe larje	Lojë
Numri i orëve					



Fig. 12.13

B Vrojtoni dhe mësoni

Një mënyrë tjetër e paraqitjes së informacionit është diagrami rrethor.



Mbani mend:

Për të paraqitur të dhëna diskrete, diagrami rrethor përdor një qark të ndarë në sektorë. Masa e secilit sektor paraqet frekuencën. Këndi i sektorit tregon pjesën e së tërës. Diagrami rrethor duhet t'i ketë sektorët të etiketuar ose të ketë një legjendë të qartë se çfarë përfaqëson secili sektor.

Për të ndërtuar një diagram rrethor, nevojiten një këndmatës dhe një komplet kompasësh.

Shembull

Tabela tregon mjetet e transportit, me të cilat vijnë në shkollë 80 nxënës.

Mjeti i transportit	Në këmbë	Me autobus	Me makinë	Me biçikletë
Numri i nxënësve	40	20	10	10

Ndërtoni një diagram rrethor për të paraqitur këtë informacion.

Zgjidhje

$$\text{Pjesa e nxënësve që ecin në këmbë} = \frac{40}{80} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Pjesa e nxënësve që vijnë me autobus} = \frac{20}{80} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Pjesa e nxënësve që vijnë me makinë} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Pjesa e nxënësve që vijnë me biçikletë} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}.$$

I gjithë rrethi paraqet 80 nxënës. Ndani rrethin në 8 sektorë të barabartë.

Secili sektor paraqet $80 : 8 = 10$ nxënës. Këndi i secilit sektor është $\frac{360}{8} = 45^\circ$.

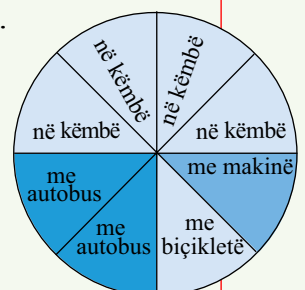


Fig. 12.14

C Ushtrohuni duke zbatuar

- Diagrami rrethor tregon se si një vajzë shpenzon një shumë prej 90 eurosh.
 - Sa sektorë ka ky diagram?
 - Çfarë mase ka secili sektor?

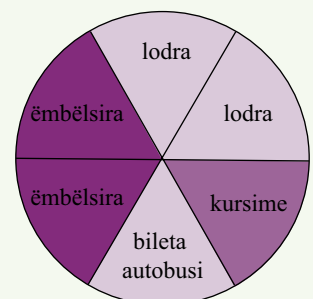


Fig. 12.15

c) Plotësoni tabelën.

Shpenzimet	Ëmbëlsira	Kursime	Libra	Bileta autobuzi
Vlera në euro				



2. Diagrami rrethor tregon shpenzimet që bën Era me rrogën e saj prej 500 eurosh.

- Sa sektorë ka ky diagram rrethor?
- Çfarë mase ka secili sektor?
- Plotësoni tabelën për të treguar se si e ka shpenzuar Era rrogën e saj.

Zërat e shpenzimeve	Kursime	Qira	Ushqim	Shpenzime shtëpie	Zbavitje
Vlera në euro					

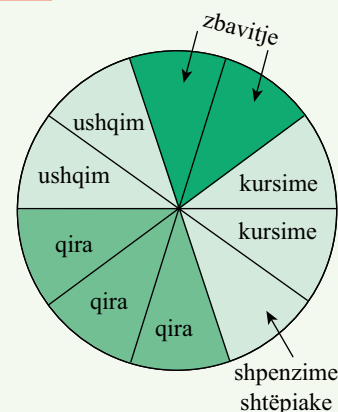


Fig. 12.16

Konstruktoni një diagram me shtylla, duke përdorur të dhënat e tabelës.

USHTRIME

1 Diagrami rrethor tregon frutat që pëlqehen më shumë nga disa nxënës.

- Sa sektorë të barabartë ka në këtë diagram?
- Cila është fruta që pëlqehet më shumë?
- Ç'pjesë e nxënësve zgjedhin qershi? Po kumbulla?
- Janë pyetur gjithsej 150 nxënës.
- Sa nxënës përfaqëson secili sektor?
- Sa nxënës pëlqejnë më shumë: pjeprin? ananasin? portokajt?

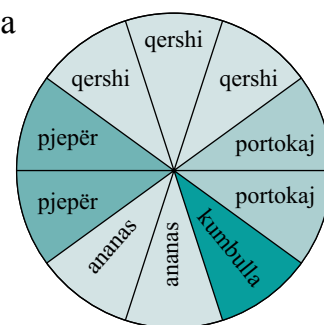


Fig. 12.17

2 Tabela tregon numrin e letrave që merr një shkollë çdo ditë.

Dita	E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte
Numri i letrave	5	10	15	5	5

- Sa letra merr shkolla gjatë javës?
- Ç'pjesë e letrave merret: a) të hënë? b) të martën? c) të mërkurën?
- Në sa sektorë do ta ndani rrethin për të konstruktuar diagramin rrethor që tregon informacionin e tabelës?
- Sa letra do të paraqiten në secilin sektor?
- Përdorni programin kompjuterik *Excel*, për të zgjidhur ushtrimin.

3 Tabela e mëposhtme tregon numrin e makinave të shitura nga një kompani në disa vite.

Viti	2011	2013	2015	2017	2019
Numri i makinave të shitura	100	200	200	300	400

- Sa makina u shitën prej vitit 2011 deri në vitin 2017?
- Ç'pjesë e makinave u shit në vitin 2011? 2015? 2019?
- Në sa sektorë do ta ndani qarkun për të vizatuar një diagram rrethor?
- Sa makina përfaqëson secili sektor?
- Sa sektorë do të përfaqësojnë numrin e makinave të shitura deri në vitin 2015?
- Konstruktoni një diagram rrethor për të paraqitur këtë informacion. Përdorni programin kompjuterik *Excel*.

12.8 Diagrami i frekuencave të grupuara për të dhëna diskrete

A Kërkoni dhe zbuloni

Mësuese Suzana u kërkoi nxënësve të klasës së 7-të të numëronin sa më shpejt: *një, dy, tre...* Pas saktësisht një minute, ajo u kërkoi nxënësve të ndalonin dhe mbajti shënim numrin ku kishte arritur secili nxënës. Të dhënat tregohen në diagram.

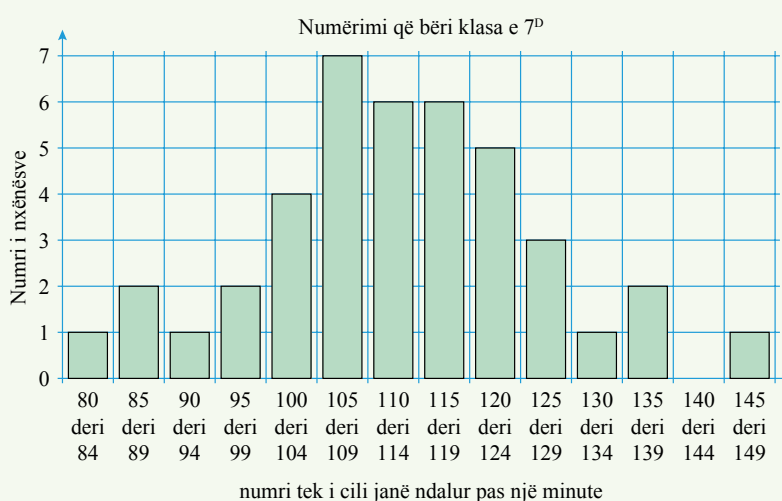


Fig. 12.18

Përgjigjuni pyetjeve të mëposhtme:

- Sa nxënës janë në klasë?
- Pse grupimi i numrave fillon nga 80 dhe jo nga 0?
- Sa nxënës arrijnë të numërojnë nga 105 deri në 109?
- Sa nxënës numërojnë nga 124 deri në 130?

B Vrojtoni dhe mësoni

Një lloj tjetër i diagramit me shtylla është **diagrami i frekuencave**, i cili shpreh grafikisht frekuencat. Një diagram frekuencash mund të përdoret për të dhëna diskrete të grupuara.

Shembull

50 nxënës morën pikët e testimit të gjeografisë. Më poshtë paraqiten rezultatet:

35	37	38	43	45	47	47	48	49	51	53	53	54
54	57	57	58	58	59	59	60	60	62	63	64	56
64	65	65	66	66	68	68	68	69	69	70	71	71
72	72	73	75	76	77	79	80	83	84	84		

Pikët më të ulëta janë 35. Pikët më të larta janë 84.

Tabela e frekuencave do të ishte vërtet shumë e gjatë:

Pikët	35	36	37	...	82	83	84
Numri i nxënësve	1	0	1	...	0	1	2

Pikët	Numri i nxënësve
35-39	3
40-44	1
45-49	5
50-54	5
55-59	7
60-64	6
65-69	9
70-74	6
75-79	4
80-84	4

Për këto të dhëna, është e vështirë të ndërtohet një diagram me shtylla, sepse do të ketë shumë shtylla me lartësi 0, 1 dhe 2. Për të lehtësuar paraqitjen, i grupojmë të dhënat.

Diagrami i frekuencave për këtë grup të dhënash paraqitet në figurën 12.19

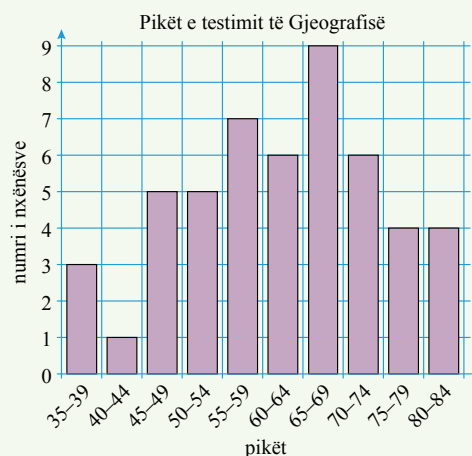


Fig. 12.19

C Ushtroni duke zbatuar

- Përdorni diagramin e mësipërm të frekuencave për t'iu përgjigjur pyetjeve vijuese.
 - Sa nxënës iu nënshtruan testimit?
 - Sa nxënës kanë marrë ndërmjet 59 dhe 65 pikë?
 - Sa nxënës kanë marrë 70 ose më shumë pikë?
 - Sa nxënës kanë marrë 50 pikë?
- Konstruktoni sërish diagramin me shtylla të shembullit të mëparshëm, por këtë herë grupojini numrat në dhjetëshe, duke përdorur ndarjet 80-89; 90-99 etj.

3. Në tabelë jepen grup-moshat e personave që janë pjesë e një klubi pingpongu.

Mosha (në vite)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Numri i pjesëtarëve	12	15	9	8	10	5

Konstruktoni diagramin me shtylla. Përdorni programin kompjuterik *Excel*. Krahasoni diagramin tuaj me atë të shokut/shoqes.

USHTRIME

- 1** Një grup prej 19 kandidatësh bëri provim në gjuhë shqipe dhe në matematikë. Përfundimet sipas rendit alfabetik jepen në tabelën e mëposhtme:

Gjuhë	73	38	48	57	84	40	49	58	12	44	50	60	21	45	53	64	25	45	54
Matematikë	74	8	50	64	58	58	53	90	6	38	49	78	17	54	82	32	48	45	54

- Duke përdorur intervalet 0-19, 20-39 etj., konstruktoni një tabelë frekuencash për pikët e secilës lëndë.
- Konstruktoni diagrame frekuencash për të treguar pikët në secilën lëndë.
- Përshkruani të gjitha ndryshimet që vini re ndërmjet dy diagrameve të frekuencave.
- A mendoni se ndryshimet e diagrameve lidhen me ndryshimet lëndore ndërmjet gjuhës shqipe dhe matematikës?
- Për secilën lëndë shkruani pikët në rendin rritës dhe gjeni medianën (mesoren).
- Sa është amplituda e pikëve për secilën lëndë?
- Përdorni përgjigjet e kërkesave e) dhe f) për të krahasuar pikët në të dyja lëndët.



Për nxënësit e klasës suaj, gjeni pikët e testeve të fundit në lëndët Gjuhë shqipe dhe Matematikë. Përsëritni kërkesat e ushtrimit 1.

12.9 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar	Provoni të zgjidhni																								
Grumbullimin e të dhënave statistikore për dukuritë që na rrethojnë.	1. Cilat pyetje do të ishin më të përshtatshme, kur bëjmë hulumtime: a) për rrjetet sociale më të përdorura? b) për vendet turistike më të pëlqyera? c) për këndvështrimet e njerëzve rreth një qendre të re sportive në qytet? d) për përdorimin e ndërtesave dhe të terrreneve të shkollës? 2. Blerta dëshiron të hulumtojë se si mund të mbrohen moshatarët e saj nga keqpërdorimi i internetit. Shkruani pesë pyetje të mundshme për pyetësin e saj.																								
Paraqitjen e të dhënave të grumbulluara në tabela.	3. Konstruktioni një tabelë frekuencash për të mbledhur të dhënat e mëposhtme mbi shtatlartësinë e nxënësve në cm të një klase të shtatë: 139; 138; 136, 142; 142; 136; 142; 138; 139; 141; 142; 136; 136; 139; 143; 136; 143; 138; 141; 142; 141; 142; 142; 138; 138; 142; 138; 142; 141; 136.																								
Njehsimin e frekuencës absolute dhe relative të një grupi të dhënash.	4. Më poshtë janë dhënë rezultatet e testit të matematikës për 24 nxënës të klasës së shtatë: <table><tr><td>37</td><td>38</td><td>38</td><td>47</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>54</td></tr><tr><td>54</td><td>54</td><td>57</td><td>57</td><td>59</td><td>59</td><td>60</td><td>60</td></tr><tr><td>62</td><td>62</td><td>62</td><td>65</td><td>71</td><td>80</td><td>81</td><td>83</td></tr></table> Këto të dhëna, paraqitini në formë tabelare duke treguar frekuencat (denduritë) absolute dhe frekuencat relative.	37	38	38	47	47	48	49	54	54	54	57	57	59	59	60	60	62	62	62	65	71	80	81	83
37	38	38	47	47	48	49	54																		
54	54	57	57	59	59	60	60																		
62	62	62	65	71	80	81	83																		
Ndërtimin e diagrameve në bazë të të dhënave të grumbulluara.	5. Tabela e mëposhtme tregon këngëtarët e preferuar të 50 nxënësve.<table><tr><td>Këngëtari/ja</td><td>Ermal Fejzullahu</td><td>Anjeza Shahini</td><td>Era Istrefi</td><td>Elsa Lila</td><td>Sidrit Bejleri</td></tr><tr><td>Numri i nxënësve</td><td>10</td><td>5</td><td>15</td><td>10</td><td>10</td></tr></table> Shprehni këtë informacion me piktogram. Ndërtoni diagramin rrethor dhe me shtylla.	Këngëtari/ja	Ermal Fejzullahu	Anjeza Shahini	Era Istrefi	Elsa Lila	Sidrit Bejleri	Numri i nxënësve	10	5	15	10	10												
Këngëtari/ja	Ermal Fejzullahu	Anjeza Shahini	Era Istrefi	Elsa Lila	Sidrit Bejleri																				
Numri i nxënësve	10	5	15	10	10																				

	6. Në piktogram jepet numri i akulloreve të shitura gjatë një jave. Konstruktioni diagramin me shtylla dhe rrethor për të dhënat e paraqitura në të.	E hënë E martë E mërkurë E enjte E premte përfaqëson 20 akullore. Fig. 12.20												
Njehsimin e vlerave mesatare: mesataren aritmetike, modën dhe medianën.	7. Përdorni një tabelë frekuencash për të llogaritur mesataren aritmetike, medianën dhe modën e 20 numrave të mëposhtëm: 6; 2; 1; 5; 3; 1; 2; 4; 4; 3; 4; 5; 6; 2; 1; 1; 3; 2; 2; 5. 8. Pikët e testimit të matematikës për pesë vajza dhe për pesë djem jepen në tabelën e mëposhtme. Duke llogaritur mesataren dhe amplitudën për vajzat dhe djemtë, krahasoni rezultatet e tyre në testim.	<table><tr><td>Vajzat</td><td>71</td><td>63</td><td>58</td><td>44</td><td>39</td></tr><tr><td>Djemtë</td><td>78</td><td>18</td><td>55</td><td>61</td><td>38</td></tr></table>	Vajzat	71	63	58	44	39	Djemtë	78	18	55	61	38
Vajzat	71	63	58	44	39									
Djemtë	78	18	55	61	38									
Përdorimin e teknologjisë për zgjidhje të problemave nga jeta në situata reale.	9. Çdo 400 g peshk i tharë përmban 150 g ujë, 50 g yndyrë, 150 g proteina dhe 50 g substanca të tjera. a) Për të paraqitur këtë informacion, konstruktioni një diagram rrethor të ndarë në 8 sektorë. Ndërtoni grafikun me ndihmën e një programi kompjuterik, si p.sh. <i>Excel</i>. b) Sa gramë përfaqëson secili sektor? c) Sa sektorë do të përfaqësojnë sasinë e proteinave të peshkut të tharë? 10. Tabela tregon ngjyrat e peshqve në akuariumin e Gretës.	<table><tr><td>Ngjyra</td><td>E artë</td><td>E gjelbër</td><td>E kaltër</td><td>E argjendtë</td></tr><tr><td>Numri i peshqve</td><td>7</td><td>4</td><td>2</td><td>5</td></tr></table> Konstruktioni diagramin shtyllë dhe rrethor. Përdorni programe kompjuterike.	Ngjyra	E artë	E gjelbër	E kaltër	E argjendtë	Numri i peshqve	7	4	2	5		
Ngjyra	E artë	E gjelbër	E kaltër	E argjendtë										
Numri i peshqve	7	4	2	5										

12.10 Vlerësim

Koha: 45 minuta

- 1 Diagrami tregon një pjesë të piktoqramit.

- a) Sa nxënës kanë munguar të hënën e parë?
b) Në qoftë se simboli $\times$ paraqet 50 nxënës, sa simbole do të përdorni për të paraqitur 250 nxënës?

Numri i nxënësve që mungojnë.	
E hëna e parë	$\times \times \times \times$
E hëna e dytë	$\times \times$
$\times$	paraqet 1 nxënës.

Fig. 12.21

(2 pikë)

- 2 Grafiku me shtylla tregon vendet e vizituara nga nxënësit e një shkolle gjatë pushimeve.

- a) Sa nxënës kanë vizituar: I. Prizrenin? II. Gjakovën?
b) Sa nxënës morën pjesë në vizita?

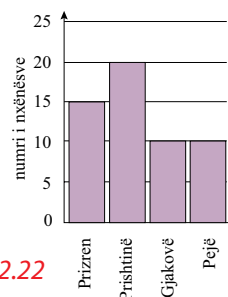


Fig. 12.22

(3 pikë)

- 3 Një studim tregon mënyrat se si nxënësit e klasës së 7-të dëgjojnë muzikë.

Me CD	Me shkarkime	Online
5	16	9

Konstruktoni një diagram rrethor për të paraqitur këtë informacion.

(3 pikë)

- 4 Krahasoni mesataret e pikëve të këtyre qitësve:

	Qitësi C	Qitësi D
Mesatarja	47	32
Mediana	21	30
Moda	8	33
Amplituda	68	12

Kush është më i mirë? Shpjegoni pse.

(3 pikë)

- 5 Dy kompani që prodhojnë pajisje elektrike, caktuan numrin e pajisjeve me defekt në 1000 pajisje të zgjedhura rastësisht gjatë pesë viteve të fundit. Numri i pajisjeve me defekt shënohet në tabelën e mëposhtme për të dyja kompanitë. Duke llogaritur mesataren aritmetike dhe amplitudën, krahasoni cilësinë e produkteve të dy kompanive.

Kompania A	51	43	50	44	39
Kompania B	48	18	55	36	68

(4 pikë)

- 6 Mesatarja aritmetike e karameleve në një pako është 24 karamele.

Në qoftë se janë tri pako, sa karamele janë përafërsisht në të tria pakot?

(2 pikë)

- 7 Andi regjistroi numrin e sendeve në shportën e blerësve gjatë një ditë në një market:

4	12	22	5	7	5	15	15	10	18	28	30	26
11	4	2	8	10	5	3	11	15	1	14	10	20
3	6	8	12	13	9	14	15	21	20	5	9	19

Ndërtoni tabelën e frekuencave të grupuara. Gjeni mesataren aritmetike.

Ndërtoni grafikun e frekuencave të grupuara.

(3 pikë)

13

PROBABILITETI

Në fund të kësaj teme, nxënësi/ja:

- parashikon mundësinë (me dallime të mëdha);
- përdor probabilitetin në jetën e përditshme;
- bën provën: e mundur, e pamundur;
- jep konceptin e probabilitetit.



Fjalë kyçe:

ngjarje e pamundur, pak e mundur, e mundur, shumë e mundur, e sigurt, probabilitet, rastet e mundshme, rastet e favorshme, herës, thyesë, përqindje, probabilitet teorik, probabilitet eksperimental.

A E DINI SE...?



Njohuritë e para për probabilitetin fillojnë në shekullin XVII. Fillimisht, ato ishin të lidhura me mundësinë e fitimit në lojërat e fatit. Më pas, një problem i rëndësishëm ishte ai i parashikimit të kthimit të anijeve në portin nga ishin nisur. Sulmet e piratëve ndaj anijeve, si dhe koha e keqe, bënë që shumë anije të mos ktheheshin dot në vendin e nisjes. Kjo i detyronte pronarët e tyre që për transportin e një malli të caktuar nga një vend në një vend tjetër, të planifikonin më shumë anije sesa u duheshin.

Roli i teorisë së probabilitetit është rritur ndjeshëm në ditët tona: në procesin zgjedhor përdoret probabiliteti për të vlerësuar se cila nga partitë pjesëmarrëse në zgjedhje ka më shumë mundësi për të fituar; prodhuesit llogarisin probabilitetin e produkteve me defekte; programuesit e lojërave kompjuterike përdorin probabilitetin, për t'u siguruar që lojërat e tyre të mos jenë të manipulueshme; shkencëtarët përdorin probabilitetin eksperimental për të ndërtuar kompjuterë apo pajisje të tjera elektronike me procesorë të përparuar; fizikanët përfshijnë probabilitetin në studimin e dukurive fizike.



13.1 Gjuha e probabilitetit

A Kërkoni dhe zbuloni

Mira do të nxjerrë një top nga thesi i treguar në figurë.

- a) A mund të nxjerrë ajo një top të kuq, një top të verdhë, një top të kaltër?
Cilën ngjyrë ka më shumë mundësi të nxjerrë Mira? Po më pak?
- b) Diskutoni me shokun/shoqen.

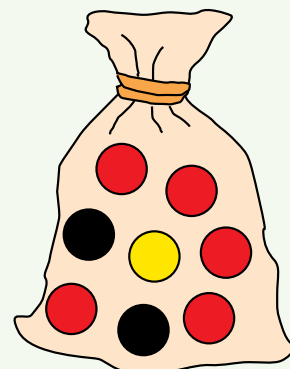


Fig. 13.1

B Vrojtoni dhe mësoni

Vini re pyetjet e mëposhtme:

- A duhet ta merrni sot me vete çadrën në shkollë?
- Cili nxënës do të dalë më mirë në testimin e matematikës?
- A duhet ta blej atë gazetë?

Sido që të përgjigjeni, ka një **mundësi** që të keni të drejtë. Sigurisht që ka edhe **rrezik** që ta keni gabim.



Mbani mend:

Në matematikë, **probabiliteti** përdoret për të parashikuar mundësinë e ndodhjes së një ngjarjeje.

Shembulli 1

Ka probabilitet të lartë, që ju të vishni uniformën e shkollës para se të shkoni në shkollë.
Ka probabilitet të ulët që nesër të bjerë shi në shkretëtirë.



Mbani mend:

Matematikisht, probabiliteti i një ngjarjeje shprehet me një numër ndërmjet 0 dhe 1. Prandaj, probabiliteti mund të shkruhet si thyesë ose si numër dhjetor. Probabiliteti mund të shkruhet edhe si përqindje. Kur përdorim përqindjen, probabiliteti shprehet me vlera nga 0% deri në 100%.

Ngjarja e sigurt e ka probabilitetin 1.

Ngjarja e pamundur e ka probabilitetin 0.

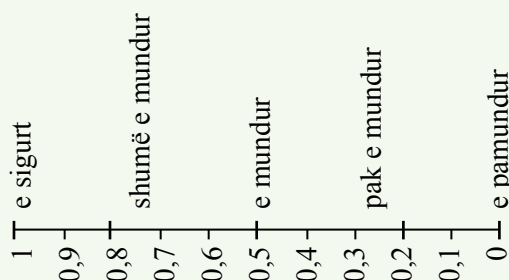


Fig. 13.2

Shembulli 2

Ngjarja “sot ditë-nata do të zgjasë 25 orë” është ngjarje e pamundur, probabiliteti i saj është 0.

Ngjarja “sot Dielli do të perëndojë” është ngjarje e sigurt, probabiliteti i saj është 1.

C Ushtroni duke zbatuar

1. Në shkallën e probabilitetit të dhënë më poshtë, vendosni ngjarjet 1,:

a) Sot do të shkoj më këmbë në shtëpi.

b) Sot do të bjerë shi.

c) Sot mësimi do të mbarojë në orën 10:00 e pamundur

të mëngjesit.

d) Sot, në shkollë do të ketë të paktën 50 nxënës.

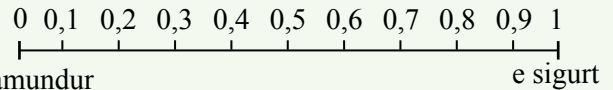


Fig. 13.3

2. Sa mundësi ka që të ndodhin këto ngjarje?

a) Unë do të luaj futboll në ekipin kombëtar.

b) Unë do të marr notë kaluese në testimin e ardhshëm në matematikë.

c) Unë sot do të fle.

3. Shkruani tri ngjarje që ju mendeni se:

a) janë të pamundura;

b) janë të sigurta;

c) janë të mundura;

d) janë shumë të mundura;

e) janë pak të mundura;

f) janë të mundura me mundësi 50%.

4. Parashikimi i motit thotë se probabiliteti që nesër të bjerë shi është 46%. A mendoni se duhet të anulohet një mbrëmje në natyrë e planifikuar për nesër? Argumentoni përgjigjen.

USHTRIME

1 Me anën e numrave ndërmjet 0 dhe 1, përcaktoni probabilitetin për secilën nga ngjarjet e mëposhtme.

a) Sot jam rritur me 4 cm.

b) Sot mësimi i matematikës do të zgjasë 2 orë.

c) Vitin e ardhshëm do të jem 16 vjeç/e.

d) Ora pasuese e mësimi do të jetë Edukatë fizike.

2 Përdorni shkallën me numra të probabilitetit për të paraqitur:

a) probabilitetin e rënies numër në hedhjen e një monedhe;

b) probabilitetin e tërheqjes

rastësisht të shkronjës R nga shkronjat e fjalës KUTIA;

c) probabilitetin e rënies së një numri më të vogël se 6 në hedhjen e zarit.

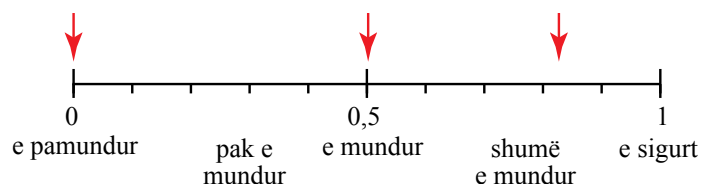


Fig. 13.4

3 Nga etiketat në figurë, tërhiqet rastësisht njëra prej tyre.

Sa është probabiliteti që ajo të jetë:

a) etiketë me ngjyrë të kaltër?

b) etiketë me numër 2?



Fig. 13.5

4 Vizatoni një shkallë probabiliteti për të treguar probabilitetin:

a) e tërheqjes së sferës së kuqe nga një kuti që përmban 20 sfera të kuqe;

b) e zgjedhjes së rastësishme të shkronjës T nga shkronjat e fjalës TRIM;

c) e rënies së numrit çift në hedhjen e zarit.

13.2 Probabiliteti statistikor

A Kërkoni dhe zbuloni

1. Hidhni një monedhë 20 herë. Regjistroni sa herë bie numër dhe sa herë bie stemë.
Ç'pjesë e numrit të hedhjeve bie: a) numër? b) stemë?
2. Hidhni një zar 50 herë. Plotësoni tabelën.

Pikët	1	2	3	4	5	6
Denduria						

Ç'pjesë e hedhjeve ka rënë: a) numri 2? b) numër çift? c) numër tek? d) numri 8?

B Vrojtoni dhe mësoni

Probabilitetin mund ta gjejmë me përafrim nëpërmjet eksperimenteve.
Në raste të tilla, mund ta përcaktoni probabilitetin P me anën e raportit:

$$P = \frac{\text{numri i rezultateve të favorshme}}{\text{numri i rezultateve gjithsej}}$$

Shembulli 1

Një monedhë hidhet 30 herë, nga të cilat 16 herë bie euro (numër) dhe 14 herë stemë.
Probabiliteti statistikor për të rënë euro (P_E) është:

$$P_E = \frac{\text{numri i rënies euro}}{\text{numri i hedhjeve}} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

Në fakt, shumë probabilitete janë gjetur nëpërmjet hulumtimeve ose statistikave.

Shembulli 2

Në tabelë tregohet numri i gjilpërave me kokë në 30 kuti:

Numri i gjilpërave	46	47	48	49	50	51
Numri i kutive	2	4	10	8	4	2

Sa është probabiliteti që kutia të ketë 48 gjilpëra? Po më shumë se 49 gjilpëra?

Zgjidhje

$$\text{a) } P(48 \text{ gjilpëra}) = \frac{\text{numri i kutive me 48 gjilpëra}}{\text{numri i kutive gjithsej}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } P(> 49 \text{ gjilpëra}) = \frac{\text{numri i kutive me më shumë se 49 gjilpëra}}{\text{numri i kutive gjithsej}} = \frac{4+2}{30} = \frac{1}{5}$$

C Ushtroni duke zbatuar

1. Alketa e hodhi monedhën 50 herë dhe mori këto rezultate:

Numër	Stemë
23	27

A mendoni se monedha është e rregullt? Argumentoni përgjigjen.



2. Pikët e 100 nxënësve në një testim janë:

Pikët	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-100
Numri i nxënësve	1	2	2	9	12	24	22	18	8	2

Sa është probabiliteti që një nxënës të marrë:

- a) 40-49 pikë? b) më pak se 40 pikë?
c) 50-59 pikë? d) 80 ose më shumë se 80 pikë?

USHTRIME

1 Gjatë një jave, një dyqan këpucësh ka shitur këpucë të numrave të mëposhtëm:

Numri i këpucës	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Numri i këpucëve të shitura	4	4	3	6	10	14	33	24	16	10	4

- Sa është probabiliteti që një klient të ketë blerë këpucë:

a) numër 36; b) numër 35 ose më pak se 35; c) numër 40 ose më shumë se 40?
- Pse këto të dhëna janë të dobishme për menaxheren e dyqanit?

2 Numri i pacientëve, që kanë shkuar për vizitë te mjeku gjatë një dite, jepet në tabelën e mëposhtme sipas grup-moshave:

Mosha	0-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Numri i pacientëve	12	23	14	7	10	14

- a) Ç'pjesë e pacientëve janë të grupmoshës 20-29 vjeç?
b) Sa është probabiliteti që një pacient të jetë 50 ose më shumë se 50 vjeç?

3 Tabela e mëposhtme tregon rezultatet e hedhjes 60 herë të një zari.

Pikët	1	2	3	4	5	6
Numri i rënies të pikëve	12	22	6	8	10	2

Gjeni probabilitetin statistikor të rënies të secilës nga pikët. A mendoni se zari është i rregullt?

4 Një klub noti bëri një studim për grup-moshat e anëtarëve të tij. Të dhënat jepen në tabelë.

Grup-mosha	0-19	20-39	40-59	60-79
Denduria	96	61	36	7

Sa është probabiliteti që një anëtar i zgjedhur të jetë në grup-moshën 20-39 vjeç, 60-79 vjeç?

5 Numrat e 20 palë këpucëve në një dyqan janë:

Numri	34	35	36	37	38	39	40
Denduria	1	2	3	3	5	4	2

Sa është probabiliteti që një klient i zgjedhur rastësisht, ta ketë numrin e këmbës 38? Po më të vogël se 36?

13.3 Probabiliteti teorik

A Kërkoni dhe zbuloni

Në një kuti janë 6 sfera të verdha dhe 4 sfera të gjelbra (sferat dallohen vetëm prej ngjyrës). Sa është probabiliteti që një sferë e tërhequr rastësisht të jetë me ngjyrë:

a) të verdhë?

b) tjetër?

c) të kuqe?

Sfera me cilën ngjyrë ka më shumë mundësi të tërhiqet?

Diskutoni.

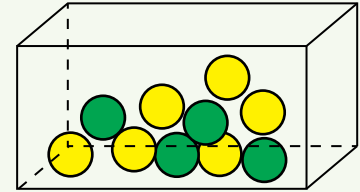


Fig. 13.6

B Vrojtoni dhe mësoni

Zakonisht, nuk është praktike të kryesh eksperimente për të gjetur probabilitetet e ngjarjeve. Në vend të kësaj, mund të parashikohet se çfarë do të ndodhë. Gjendet **probabiliteti teorik** që jepet nga formula e thjeshtë:

$$P = \frac{\text{numri i rasteve të favorshme}}{\text{numri i rasteve të mundshme}}$$

kur rastet janë njëlloj të mundshme.

Shembulli 1

Kur hedhim një zar, janë 6 **raste të mundshme të pikave në faqen e sipërme** 1, 2, 3, 4, 5 ose 6. Në qoftë se zari është i rregullt, secili nga këto raste është **rezultat njëlloj i mundshëm**. Ato janë edhe të gjitha **rezultatet e mundshme**. Supozojmë se ngjarja e favorshme është “bie numër çift”. Për këtë, ka tri **mundësi**: 2, 4 ose 6. Pra, probabiliteti

teorik për të rënë numër çift i pikave është: $P(\text{çift}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Për një numër të vogël hedhjesh, kjo mund të mos ndodhë. Ndodh kështu, sepse probabiliteti shpreh një mundësi, që do të thotë se ajo që ndodh teorikisht, jo domosdoshmërisht ndodh në realitet.

Shembulli 2

Në një kuti ndodhen 3 sfera të bardha dhe 2 sfera të zeza.

Nxjerrim rastësisht një sferë nga kutia. Sa është probabiliteti që ajo të jetë e zezë?

Zgjidhje

$$P_z = \frac{\text{numri i sferave të zeza}}{\text{numri i sferave të mundshme}} = \frac{2}{5}$$

C Ushtrohuni duke zbatuar

1. Në një kuti, janë 5 sfera të verdha, 3 sfera të kuqe dhe 4 sfera të gjelbra. Sa është probabiliteti që një sferë e tërhequr rastësisht të jetë me ngjyrë të verdhë? Po me ngjyrë tjetër?

2. Janë dhënë 25 etiketa të kuqe me numra nga 1 në 25 dhe 25 etiketa të kaltra me numra nga 1 në 25, të cilat janë përzier. Në figurë, paraqiten disa prej tyre. Sa është probabiliteti që një etiketë e tërhequr rastësisht të jetë:



Fig. 13.7

- etiketa me numër 10?
- një etiketë e kuqe?
- një etiketë me numër të ndryshëm nga 4?
- një etiketë me ngjyrë të ndryshme nga e kuqja?
- një etiketë me një numër që është shumëfish i numrit 2?



3. Për ruletën e treguar në figurë, shkruani të gjitha rezultatet e mundshme.

- Duke përdorur ruletën, sa është probabiliteti që shigjeta të ndalojë:
 - te ngjyra e kaltër?
 - te ngjyra e kuqe?
 - te ngjyra e verdhë?
 - te ngjyra e bardhë?
 - te ngjyra e verdhë ose e gjelbër?
- A është e vërtetë se të gjitha rezultatet e mundshme, kanë të njëjtin probabilitet për të ndodhur?

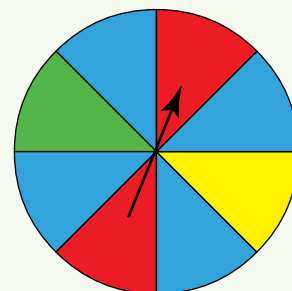


Fig. 13.8

USHTRIME

- 1 Të 36 shkronjat e alfabetit janë shkruar në petëza dhe janë futur në një çantë. Tërhiqet në mënyrë të rastësishme një petëz. Sa është probabiliteti që:

- të tërhiqet shkronja V?
- të mos tërhiqet shkronja E?
- të tërhiqet një zanore?
- të tërhiqet një nga shkronjat e fjalës LIBËR?
- të tërhiqet një nga shkronjat D, S ose B?
- të tërhiqet një bashkëtingëllore?



Fig. 13.9

- 2 Një program kompjuterik është hartuar për të paraqitur në mënyrë të rastësishme një numër natyror nga 1 në 25.

- Sa është probabiliteti që numri i paraqitur të jetë:
 - numri 7?
 - një numër më i madh se 20?
 - një shumëfish i numrit 5?
 - një numër i thjeshtë?
 - një numër joshumëfish i numrit 7?
- Ndërtoni shkallën e probabilitetit. Shënoni në të përgjigjet e pikës a).

- 3 Hidhni një monedhë 10 herë. Krahasoni probabilitetin statistikor të rënies së numrit me probabilitetin teorik përkatës.

- 4 Kur hedhim një zar të rregullt, mundësitë për të rënë secili nga numrat, 1-6 janë të barabarta.

- Sa është probabiliteti teorik për rënien e secilit numër?
- Hidheni zarin 60 herë. Shkruani probabilitetin statistikor për secilin numër.
- Sa herë prisni të bjerë numri 2? A ju ka rënë vërtetë kaq herë numri 2? Po për numrat e tjerë?
- Krahasoni probabilitetin teorik me probabilitetin statistikor. A janë njëjloj?

- 5 Joni vendosi të bënte një eksperiment. Ai ndau një fletë letre në 10 pjesë dhe shkroi në to numrat nga 1 në 10. I ktheu ato përmbys dhe i ngatërroi. Më pas, ai mori rastësisht njërin prej tyre dhe, pasi mbajti shënim numrin, e vendosi përsëri në tavolinë. Këtë veprim e përsëriti 20 herë.

- Sa është probabiliteti teorik që Joni të ketë marrë numrin 9 në tërheqjen e parë? Po në të dytën?
- Bëjeni edhe ju këtë eksperiment. Sa është probabiliteti statistikor që të tërhiqni numrin 9? Krahasoni dy probabilitetet edhe për numrat e tjerë.

13.4 Çfarë mësuam? (Përsëritje)

Tashmë kemi mësuar	Provoni të zgjidhni
Parashikimin e mundësive të ndodhjes së ngjarjes me dallime të mëdha.	1. Përshkruani mundësinë e ndodhjes së këtyre ngjarjeve: - Do të ketë shira në dy javët e ardhshme. - Do të fitoni një çmim të madh në lotari. - Dita që vjen pas së shtunës është e diela. - Në Prishtinë, vitin tjetër do të bjerë borë. Përdorni shkallën e probabilitetit për të vendosur ngjarjet. Fig. 13.10 2. Disku i mëposhtëm rrotullohet. Përshkruani mundësitë e ndodhjes së ngjarjeve: - shigjeta të ndalojë në sektorin me ngjyrë të kuqe; - shigjeta të ndalojë në sektorin me ngjyrë të kaltër; - shigjeta të ndalojë në sektorin me ngjyrë të bardhë. Fig. 13.11 Përdorni shkallën e probabilitetit për të vendosur ngjarjet.
Konceptin e probabilitetit, njehsimin e probabilitetit teorik nëpërmjet raportit të rasteve të favorshme me rastet e mundshme të ndodhjes së ngjarjes.	3. Ndërtoni një shkallë probabiliteti duke përdorur: - numra thyesorë; - numra dhjetorë; - përqindje. 4. Hidhni një zar. Gjeni probabilitetin që gjatë hedhjes së zarit të bjerë: - numër çift; - numër më i vogël se 5; - numër që plotpjesëtohet me 2 dhe me 3; - numër më i vogël se 7; - numër që plotpjesëtohet me 3 dhe 4. Fig. 13.12 5. Një pako ka karamеле në tri ngjyra: 5 të kuqe, 12 të gjelbra dhe 3 të verdha. Andi tërheq rastësisht një karamelë. Tregoni probabilitetin që karamelja e tërhequr të jetë: - e kuqe; - e gjelbër; - e verdhë.

Njehsimin e probabilitetit eksperimental nëpërmjet provave.

6. Zana hodhi një monedhë 20 herë. Ajo mbajti shënim çfarë i ra për çdo rast:

numër	8
kokë	12

Gjeni probabilitetin e rënies së numrit dhe të kokës. Krahasoni me probabilitetin teorik.

7. Hidhni një zar 30 herë. Plotësoni tabelën:

Pikët	1	2	3	4	5	6
Denduria						

Gjeni ç'pjesë të hedhjes ka rezultuar në:

- a) numrin 3; c) numër çift;
b) një shumëfish të dyshit; d) numrin 7.

Përdorimin e probabilitetit në jetën e përditshme.

8. Një shkronjë zgjidhet rastësisht nga fjala STILIST. Sa është probabiliteti që:

- a) të jetë shkronja L?
b) të jetë një zanore?
c) të mos jetë shkronja S?

9. Berti po përpiket të vizatojë një ruletë sipas probabiliteteve që i ka thënë Gerta:

Ngjyra	E kuqe	E verdhë	E kaltër
Probabiliteti	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

Pse nuk është e mundur të vizatohet kjo ruletë? Argumentoni.

10. Janë shitur 100 bileta lotarie. Vetëm njëra prej tyre fiton çmimin e lotarisë. Zgjidhet rastësisht një biletë, e cila do të fitojë çmimin e lotarisë. Bardha ka 20 bileta të tilla. Cila nga shkronjat në shkallëzimin e mëposhtëm shpreh probabilitetin që Bardha të fitojë çmimin e lotarisë?

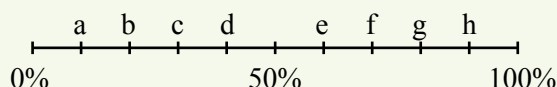


Fig. 13.13

13.5 Vlerësim**Koha: 45 minuta**

1 Një kuti përmban 6 sfera të kuqe, 3 sfera të bardha, 4 sfera të verdha dhe 7 sfera portokalli. Sa është probabiliteti që një sferë e tërhequr rastësisht:

- të jetë e kuqe?
- të jetë e verdhë?
- të mos jetë e kuqe?
- të jetë e bardhë ose portokalli?
- të jetë as e kuqe, as e bardhë?

(5 pikë)

2 Shkronjat e fjalës MUNDËSI janë futur në një kuti. Zgjidhet rastësisht një shkronjë. Sa është probabiliteti që ajo:

- të jetë shkronja N?
- të jetë shkronja D?
- të jetë shkronja K?
- të jetë një zanore?
- të mos jetë shkronja D?

(5 pikë)

3 Ela mori nga kutia një rruazë, pa e parë. Ajo mbajti shënim ngjyrën dhe më pas e futi sërish rruazën në kuti. Këtë veprim ajo e bëri 100 herë, nga të cilat 17 herë mori rruazën e kaltër? Gjeni probabilitetin e tërheqjes së rruazës e kaltër.

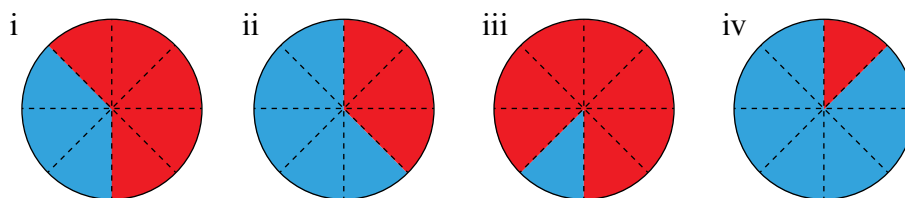
(2 pikë)

4 Vizatoni një ruletë me probabilitetet e mëposhtme:

(3 pikë)

Ngjyra	E kuqe	E verdhë	E kaltër	E gjelbër
Probabiliteti	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

5 Gjeni probabilitetin që katër disqet për secilin rast, të qëndrojnë në ngjyrën e kaltër. Përdorni shkallën e probabilitetit në secilin nga rastet.

(4 pikë)*Fig. 13.14*

6 Një prodhues llogariti probabilitetin që një nga makinat larëse të tij të pësonte defekt në dy vitet e para. Nga studimi vuri re se nga 150 makina, 22 dalin me defekt. Vlerësoni probabilitetin që një makinë të mos jetë me defekt.

(2 pikë)

FJALOR

Kreu 1

- **Thyesa të anasjellta** quhen thyesat $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{b}{a}$, ku . Prodhimi i tyre është 1.
- **Thyesat dhjetore** janë thyesat me emërues 10, 100, 1000 etj.
- **Numra dhjetorë të pafundmë periodikë** kanë një sasi të pafundme (numër të pafundmë) shifrash pas presjes dhjetore, gjithmonë një shifër ose një grup shifrash përsëritet vazhdimisht. Shifra ose grupi i shifrave që përsëriten vazhdimisht quhet **periodë**.

Kreu 2

- **Kënd** quhet figura gjeometrike e formuar nga bashkimi (unioni) i dy gjysmëdrejtëzave që kanë të njëjtën origjinë. Gjysmëdrejtëzat që formojnë këndin quhen krahë, kurse origjina e tyre quhet kulm i këndit.
- **Kënde fqinje**, këndet që kanë kulmin përbashkët, një krah të përbashkët dhe dy krahët tjerë në anë të ndryshme të krahut të përbashkët.
- **Kënde kryqëzuese** quhen dy kënde të tillë, që krahët e njërit janë gjysmëdrejtëza plotësuese të krahëve të tjetrit.
- **Kënd i shtrirë** quhet i tillë nëse krahët e tij janë gjysmëdrejtëza plotësuese të njëra-tjetrës.
- **Kënde plotësues (komplementarë)** nëse shuma e dy këndeve është kënd i drejtë.
- **Kënde shtues (suplementarë)** nëse shuma e dy këndeve është kënd i shtrirë.
- Dy drejtëza quhen **normale (pingule)** me njëra-tjetrën, kur ato priten duke formuar kënde të drejta, simbolikisht shkruajmë $a \perp b$.
- Dy drejtëza në rrafsh, që nuk kanë asnjë pikë të përbashkët, quhen **drejtëza paralele**, simbolikisht shkruajmë $a \parallel b$.
- **Largesë midis pikave A, B** quajmë gjatësinë e segmentit [AB]. Simbolikisht shkruajmë AB.
- **Largesë midis dy drejtëzave paralele** quajmë largesën e një pike çfarëdo të njërës drejtëz prej drejtëzës tjetër.
- **Simetrale (përmesore)** e një segmenti quhet drejtëza pingule me këtë segment dhe që kalon nëpër mesin e segmentit.

Kreu 3

- **Numra të plotë quhen** numrat natyrorë, numrat e plotë negativë dhe numri zero. Bashkësia e numrave të plotë shënohet me shkronjën **Z**.
- Numrat e plotë m dhe $-m$ quhen **të kundërt të njëri-tjetrit**.
- **Ndryshim** të numrit a me numrin b quajmë numrin e plotë, që po të mblidhet me b jep a . Ky ndryshim shënohet $a - b$.
- Numri i plotë h quhet **herës i** pjesëtimit të numrit të plotë a me numrin e plotë b , nëse $b \cdot h = a$. Në këtë rast shkruajmë $a : b = h$.

Kreu 4

- **Numra racionalë** quhen thyesat pozitive, thyesat negative, të cilat për emërues dhe numërues kanë numra të plotë, ose që kthehen në këto thyesa, kurse emëruesi nuk është zero. Bashkësia e numrave racionalë shënohet me shkronjën **Q**. Bashkësia e numrave racionalë është bashkësi e mbyllur ndaj mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe pjesëtimit (me pjesëtues të ndryshëm nga zero).
- **Vlerë absolute** të një numri quajmë largesën nga origjina, të pikës përgjegjëse të tij, në boshtin numerik. Ajo shënohet $|a|$ dhe është gjithmonë numër jonegativ.

Kreu 5

- **Vijë e thyer** quhet vija e formuar nga unioni (bashkimi) i segmenteve të njëpasnjëshëm. Një vijë e thyer mund të jetë e **hapur** ose e **mbyllur**, ajo mund të presë edhe veten.
- **Shumëkëndësh** quhet figura e formuar nga një vijë e thyer e mbyllur, që nuk e pret veten.
- **Sipërfaqe shumëkëndëshe** quhet figura e formuar nga një shumëkëndësh dhe nga pikat që ndodhen brenda saj (në pjesën e kufizuar).
- **Perimetër i shumëkëndëshit** quhet shuma e gjatësive të brinjëve të shumëkëndëshit.
- **Diagonale** të shumëkëndëshit quhen segmentet që bashkojnë dy kulme jo të njëpasnjëshme të shumëkëndëshit.
- **Kënd i brendshëm** i shumëkëndëshit quhet këndi i formuar nga dy brinjë të njëpasnjëshme dhe që përmbahet brenda shumëkëndëshit.
- **Kënd i jashtëm** i shumëkëndëshit quhet këndi i përbrinjëshëm me një kënd të brendshëm të shumëkëndëshit konveks.
- **Shumëkëndëshi** quhet i **rregullt**, nëse ai i ka të gjitha brinjët e barabarta midis tyre dhe të gjitha këndet kongruente midis tyre.
- **Trekëndësh** quhet shumëkëndëshi që ka tri brinjë.
- **Katërkëndësh** quhet shumëkëndëshi që ka katër brinjë.
- **Trapez** quhet katërkëndëshi që ka vetëm një çift brinjësh paralele. Brinjët paralele quhen **baza të trapezit**. Brinjët jo paralele quhen **brinjë anësore** ose krahë të trapezit. Largesia midis bazave të trapezit quhet **lartësi e trapezit**.
- **Paralelogram** quhet katërkëndëshi që i ka brinjët dy nga dy paralele me njëra-tjetrën. Largesia midis dy brinjëve të kundërta të paralelogramit quhet **lartësi** e paralelogramit.
- **Drejkëndësh** është paralelogrami që i ka të katër këndet e drejta.
- **Romb** është paralelogrami që i ka të katër brinjët kongruente.
- **Katror** është drejkëndëshi që i ka të katër brinjët kongruente, ose rombi që i ka të katër këndet të drejta.

Kreu 6

- **Fuqia** e një numri është numri që merret duke shumëzuar aq faktorë, të barabartë me bazën, sa njësi ka eksponenti. **Eksponenti** i fuqisë na tregon se sa faktorë të barabartë (me bazën) shumëzohen. Veprimi që bëjmë për të gjetur fuqinë quhet “**ngritje në fuqi**”. Simbolikisht shkruajmë
- Numri shkruhet në **trajtë shkencore** nëse ai paraqitet në trajtën $n = a \times 10^m$ ose në trajtën: $n = \frac{a}{10^m}$, ku $1 \leq a < 10$ dhe $m \in \mathbb{N}$.
- **Rrënja katrore** e numrit jonegativ a quhet numri që katrorin e vet e ka a . Ky numër shënohet $\sqrt{a}$ (lexohet: rrënja katrore e a).

Kreu 7

- **Raport (përpjesë)** quajmë herësin e dy numrave. **Raporti** tregon se sa herë më “i madh” është numri i parë se i dyti, apo ç’pjesë të të dytit përbën numri i parë.
- **Përpjesëtim (proporcion)** quajmë barazimin e dy raporteve. Me ndihmën e shkronjave, përpjesëtimin e shkruajmë kështu: $a : b = c : d$ ose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b, d \neq 0$).
- Në përpjesëtimin $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, numrat a dhe d quhen **kufiza të jashtme**, kurse numrat b, c quhen **kufiza të brendshme**.
- Nëse kemi përpjesëtimin $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, atëherë x quhet i **katërti përpjesëtimor** i treshes së radhitur të numrave a, b, c .

- Dy madhësi quhen në **përpjesëtim të drejtë**, nëse kur njëra prej tyre rritet (zvogëlohet) disa herë, edhe tjetra rritet (zvogëlohet) po aq herë.
- **Shkallë të hartës (skicës)** quhet raportin e gjatësisë së një segmenti në një hartë (apo skicë), me gjatësinë e segmentit përkatës në Tokë.

Kreu 8

- Njësia bazë për matjen e **gjatësive** është **metri** (shënohet m).
- Njësia bazë për matjen e **syprinave** të sipërfaqeve është **metri katror** (shënohet m²). Në bujqësi, për matjen e syprinave të sipërfaqeve tokësore përdoren njësitë e mëposhtme: **dynymi** (dn); **ar, hektari** (ha).
- **Perimetri** i rrethit me diametër d me rreze R jepet me formulën $P = \pi d = 2\pi R$.
- **Teorema e Pitagorës**: Në trekëndëshin kënddrejtë, syprina e katrorit të ndërtuar mbi hipotenuzën e tij është **i barabartë me shumën** e syprinave të katrorëve të ndërtuar mbi katetet e tij.

Kreu 9

- **Shprehje me ndryshore**, shprehje që formohen me anë të numrave, ndryshoreve, shenjave të veprimeve dhe kllapave.
- Nëse shkronjat që figurojnë në një shprehje algjebrike i zëvendësojmë me numra dhe më pas kryejmë veprimet, do të marrim **vlerën numerike** të asaj shprehjeje për numrat e dhënë.
- Dy shprehje quhen **identike** nëse për çdo vlerë të ndryshores (ndryshoreve) i kanë vlerat përgjegjëse të barabarta.
- **Shndërrim identik** quhet zëvendësimi i çdo shprehjeje me një shprehje tjetër, identike me të.
- **Monom** quhet shprehja që merret duke kryer, mbi numrat dhe ndryshoret, vetëm veprimet e shumëzimit dhe të ngritjes në fuqi.
- **Dy ose më shumë monome** quhen **të ngjashëm**, kur në trajtat e tyre të rregullta i kanë pjesët shkronjore të njëjta.
- **Reduktim i kufizave të ngjashme** quhet veprimi i mbledhjes (zbritjes) së koeficientëve numerik të monomeve.
- **Ekuacion** quhet barazimi shkronjor (me ndryshore) për të cilin kërkohet vlera e shkronjës (ndryshores), që e kthen atë në barazim numerik të vërtetë. Kjo vlerë e shkronjës (ndryshores) quhet **zgjidhje e ekuacionit**.
- **Dy ekuacione** me të njëjtën ndryshore quhen **të njëvlershëm**, nëse kanë zgjidhje të njëjta.
- **Inekuacion** quhet mosbarazimi me një ndryshore, në qoftë se kërkohen vlerat e ndryshores që e vërtetojnë atë (e kthejnë në mosbarazim të vërtetë me të njëjtin kah). Çdo vlerë e tillë e ndryshores quhet **zgjidhje e inekuacionit**.
- **Dy inekuacione**, me të njëjtën ndryshore, quhen **të njëvlershëm** nëse kanë të njëjtën bashkësi zgjidhjesh.

Kreu 10

- Nëse pika A përshkon një figurë F , atëherë simetrikja e saj A_1 do të përshkojë një figurë F_1 , që quhet **simetrike** e figurës F në lidhje me drejtëzën d .
- Dy figura, që janë simetrike në lidhje me një drejtëz, janë **kongruente**.
- **Shumëfaqësh** quhet trupi i kufizuar nga shumëkëndësha.
- **Shumëkëndëshat** që kufizojnë shumëfaqëshin quhen **faqe** të shumëfaqëshit. Dy faqe priten sipas një **brinje**.
- **Shumëfaqëshi** quhet **konveks** nëse është i vendosur në të njëjtën anë të rrafshit të secilës faqe të tij.

- **Prizmi i drejtë** është shumëfaqësh që ka dy baza paralele dhe kongruente (që mund të puthiten) dhe faqe anësore që janë drejtkëndësja.
- **Prizëm i rregullt** quhet prizmi i drejtë që i ka bazat shumëkëndësja të rregullt.
- **Piramida** është një shumëfaqësh që ka një faqe shumëkëndëshe (trekëndësh, katërkëndësh, pesëkëndësh etj.), që quhet **bazë** dhe disa faqe anësore që janë trekëndësja. Të gjitha faqet anësore kanë një kulm të përbashkët, që quhet **kulm** i piramidës.
- **Piramida** quhet **e rregullt** nëse plotësohen dy kushte: baza është një shumëkëndësh i rregullt, ndërsa brinjët anësore janë të barabarta.
- **Syprinë anësore** e prizmit quhet shuma e syprinave të faqeve anësore të tij. Nëse shënojmë me S_b syprinën e bazës së prizmit, syprina e **përgjithshme** e **prizmit** është $S_p = S_a + 2S_b$.
- **Syprinë anësore** e piramidës quhet shuma e syprinave të faqeve anësore të saj. **Syprina e përgjithshme** të saj është $S_p = S_a + S_b$, ku S_b paraqet syprinën e bazës së piramidës së rregullt.
- **Vëllim** i trupit quhet masa e pjesës së hapësirës që zë trupi. Si njësi e vëllimit merret vëllimi i kubit që e ka brinjën sa njësia e gjatësisë. Kjo njësi quhet **njësi kubike** p.sh. 1 m^3 ; 1 km^3 etj.

Kreu 11

- **Funksion** të bashkësisë A në bashkësinë B quajmë çdo rregull (ligj, procedurë) f me ndihmën e së cilës çdo elementi të bashkësisë A i shoqërohet një element i vetëm i bashkësisë B. Simbolikisht shkruajmë “ $f: A \rightarrow B$, ”.
- Bashkësia A quhet **bashkësia e përcaktimit të funksionit (domeni i funksionit)**.
- Bashkësia B quhet **bashkësia e vlerave të funksionit (kodomeni i funksionit)**.
- **Grafik i funksionit** “ $f: A \rightarrow B$ ” quhet bashkësia e pikave të rrafshit koordinativ xOy , të cilat kanë si abshisë elementet e bashkësisë A dhe si ordinatë vlerën përgjegjëse të funksionit.
- **Grafiku i funksionit** $y = kx$, sidoqoftë numri racional k , është bashkësi pikash që ndodhen në një drejtëz, e cila kalon nëpër origjinën e sistemit koordinativ.

Kreu 12

- **Të dhëna parësore** quhen të dhënat që i mbledhni vetë.
- **Të dhëna dytësore** quhen të dhënat të mbledhura nga një burim tjetër (p.sh., nga interneti).
- **Frekuenca (denduria) absolute** është numri i përsëritjeve të një të dhëne. **Frekuenca (denduria) relative** është herësi ndërmjet frekuencës absolute të një të dhëne dhe numrit të të gjitha të dhënave të grumbulluara.
- **Moda** është vlera që përsëritet (ndeshet) më shpesh. Në rastin kur të dhënat i kemi grupuar në klasa, përdoret termi **klasë modale**.
- **Mediana (mesorja)** është vlera e mesit në një grup të dhënash nga më e vogla te më e madhja.
- **Amplitudë** quhet ndryshimi ndërmjet vlerës më të madhe dhe vlerës më të vogël.
- **Piktogram** quhet metoda (teknika) e përdorimit të figurave apo vizatimeve për të paraqitur të dhëna diskrete.
- **Diagrami me shtylla** paraqet të dhënat duke përdorur shtylla me gjatësi ose lartësi të ndryshme, horizontale ose vertikale.
- **Diagrami rrethor** përdor një qark të ndarë në sektorë për të paraqitur të dhënat.

Kreu 13

- **Probabiliteti** përdoret për të parashikuar mundësinë e ndodhjes së një ngjarjeje.
- **Ngjarja e sigurt** e ka probabilitetin 1.
- **Ngjarja e pamundur** e ka probabilitetin 0.
- Probabilitetin mund ta gjejmë me përafrim nëpërmjet eksperimenteve, me anën e raportit:

$$P = \frac{(\text{numri i rezultateve të favorshme})}{(\text{numri i rezultateve të mundshme})}$$

REFERENCA

- Korniza kurrikulare e Arsimit Parauniversitar e Republikës së Kosovës (e rishikuar), Prishtinë, gusht 2016.
- Kurrikula bërthamë e arsimit të mesëm të ulët të Republikës së Kosovës, Prishtinë, gusht 2016.
- Kurrikula lëndore/programi mësimor për *Matematikën 7*, Prishtinë, 2019.
- Standarde për tekstet shkollore, Prishtinë, 2011.
- *Oxford International Math for Cambridge Secondary 1*, Deborah Barton etc. Oxford University Press, 2013.
- *Oxford International Primary, Maths 7*, Anthony Cotton etc, Oxford University Press, 2014.
- *Mathematiques "Triangle"*, Giselle Chapiron etc, editions Hatier, Paris, 2013.
- *"Matematica e mondo reale A-B"*, Teresa Genovese etc, Lattes editori, Torino, 2014.
- *Cap Maths, Manuel de l'élève*, Roland Charnay, Georges Combier, Marie-Paule Dussuc, Dany Madier, Paris, 2007.
- *Cap Maths, Guide de l'enseignant*, Roland Charnay, Georges Combier, Marie-Paule Dussuc, Dany Madier, Paris, 2010.
- *Macmillian Mathematics, Pupil's book*, Paul Broadbent, Paris, 2012.
- *Investigations in number, data and space*, Cambridge, MA, 2008.

Fotografitë e marra nga faqet:

- <https://www.dreamstime.com/>
- <https://www.wikipedia.org/>

Katalogimi në botim – (CIP)

Biblioteka Kombëtare e Kosovës “Pjetër Bogdani”

37.016:51(075.2)

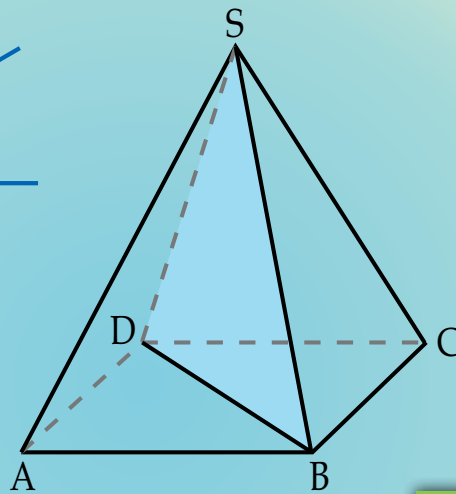
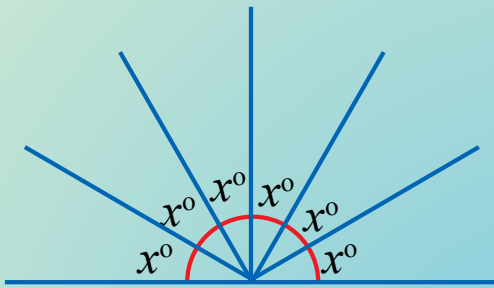
Lulja, Edmond

Matematika 7 : për klasën e 7-të të arsimit 9-vjeçar / Edmond

Lulja, Irena Tafani, Ramadan Limani. - Prishtinë : Pegi, 2024. -
262 f. : ilustr. : 20.7 x 29 cm.

1. Tafani, Irena 2. Limani, Ramadan

ISBN 978-9951-843-26-3



Matematika 7

ISBN: 978-9951-843-26-3



9 789951 843263